DÉCOUVERTE

I- Abonnements à « PARIS MATHS »

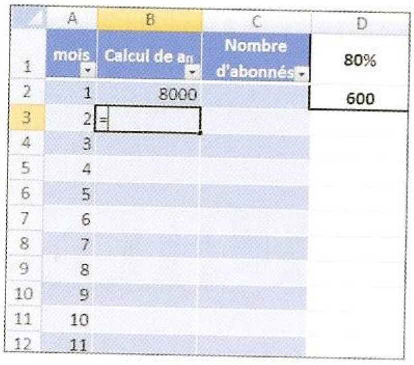
Un éditeur veut faire paraître un nouveau magazine mensuel intitulé « PARIS MATHS », sachant qu'un nouveau magazine reste rentable pour lui, dès lors que le nombre d'abonnés reste supérieur ou égal à 3 000. Il réalise une étude de marché qui révèle que le nombre d'abonnés serait de 8 000 la première année, que le taux de réabonnement serait de 80 % et que, chaque année, il y aurait 600 nouveaux abonnés.

n étant un entier naturel, on note, dans cette activité, a_n le nombre d'abonnés à l'année n. On suppose que $a_1 = 8\,000$.

A. Point de vue éditorial :

A l'aide d'un tableur, déterminer le nombre d'abonnés des premières années. En colonne B, on donnera le résultat de a_n et en colonne C, le résultat arrondi à l'entier près de la colonne B.

Rappel :
En colonne C, penser à utiliser la fonction :
« =ARRONDI(nombre ; n° chiffre) »



	A	B	C	D
1	mois	Calcul de an	Nombre d'abonnés	80%
2	1	8000		600
3	2	=		
4	3			
5	4			
6	5			
7	6			
8	7			
9	8			
10	9			
11	10			
12	11			

1- Représenter graphiquement, à l'aide du tableur, le nombre d'abonnés en fonction de l'année, sur 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40 et 50 années.

2- Conjecturer alors le comportement de ce nombre d'abonnés au fur et à mesure que les années s'écoulent.

3- Le magazine semble-t-il pérenne dans le temps ?

B. Point de vue mathématique :

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1- Expliciter une relation entre a_{n+1} et a_n.

2- On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (b_n) par : $b_n = a_n - 3\,000$
Montrer que la suite (b_n) est géométrique, puis déterminer les éléments caractéristiques de cette suite, ainsi qu'une formule explicite de b_n.

3- En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n en fonction de n.

4- Justifier que la suite (a_n) est strictement décroissante et qu'elle est minorée par 3 000.

5- **a.** Montrer que $a_n = 3\,000$ si, et seulement si, $a_{n+1} = 3\,000$.
b. La suite (a_n) peut-elle atteindre la valeur de 3 000 ?
c. Pourquoi le tableur affiche-t-il pour autant $a_n = 3\,000$, à partir d'un certain rang ?

6- Conclure sur l'évolution dans le temps du nombre d'abonnés au magazine « PARIS MATHS ».

II- Démontrer « Pour tout »

On considère la suite numérique (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 1 \end{cases}$$

1- Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).

2- On utilise un tableur pour obtenir u_0, u_1 jusqu'à u_{11}.

- **a.** Quelle formule, à étirer vers le bas jusqu'en cellule B13, peut-on écrire en cellule B3 ?
- **b.** Représenter graphiquement, dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$ pour n entier compris entre 0 et 11.
- **c.** Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
- **d.** A l'aide du tableur, vérifier que la conjecture est toujours exacte avec de grandes valeurs de l'entier n (par exemple $n = 100; 557; 1\,284$ ...).

	A	B
1	Indice n	terme u_n
2	0	1
3	1	=
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	
13	11	

3- Pour tout entier naturel n, on définit la propriété $P(n)$ par : $u_n = (n-1)^2$.

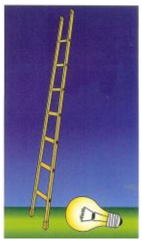
- **a.** Qu'est-ce que l'étude précédente sur tableur, laisse à penser de la propriété P ?
- **b.** Démontrer que la propriété $P(n)$ est **héréditaire**, c'est-à-dire que, pour tout n entier naturel fixé : $P(n)$ est vraie implique que $P(n+1)$ est vraie.
- **c.** Peut-on , à partir de cette propriété d'hérédité, en déduire que la propriété $P(n)$ est vraie, pour tout n entier naturel ?

4- On remplace le contenu de la cellule B2 par la valeur $u_0 = 2$.

- **a.** Effectuer le changement sur la feuille de calcul et écrire en face, dans la colonne C les termes de la séquence « $(n-1)^2$ », pour n entier naturel compris entre 0 et 11.
- **b.** Conjecture-t-on toujours que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie ?
- **c.** Démontrer que la propriété $P(n)$ est, pour autant, toujours héréditaire.

5- Soit $Q(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.

- **a.** Expliquer pourquoi le seul fait de savoir que la propriété Q est héréditaire ne peut pas permettre de justifier que cette propriété Q est vraie pour tout entier naturel n.
- **b.** Que faudrait-il savoir au moins en plus pour décider que Q est vraie pour tout entier n ?



Vérifier qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier naturel n est vraie au rang 0, puis vérifier qu'elle est héréditaire, sont les deux étapes d'un raisonnement dit « par récurrence » qui permet effectivement de montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.