SYSTEME DE NUMERATION ET BASE

I) NOTRE SYSTEME DE NUMERATION

• *Notre système de numération est un système décimal de position. Il est constitué de 10 chiffres dont la position indique le nombre d'unités de la puissance de 10 correspondante.*

$$\mathbf{3405 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0}$$

Il a fallu attendre le XIIème siècle pour que ce système inventé en Inde arrive en occident.

II) NOTION DE BASE

DEFINITION

Dans un système de position en base b, on note un nombre N par $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots \dots a_1 a_0}^{b}$. Ce nombre N s'écrit dans notre système décimal de position par :

$$\boldsymbol{N = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots \dots a_1 a_0}^{b} = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \dots \dots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0}$$

Avec $a_n, a_{n-1}, \dots \dots, a_0$ des chiffres strictement inférieur à b. En base b, il ne peut y avoir que b chiffres.

1) *Conversion de la base b vers la base 10*

• En base 2, il n'y a que de 2 chiffres : 0 et 1.

$$\overline{110111}^2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1$$

$$= 55$$

• En base 5, il y a 5 chiffres : 0, 1, 2, 3 et 4.

$$\overline{231}^5 = 2 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$

$$= 2 \times 25 + 3 \times 5 + 1$$

$$= 50 + 15 + 1$$

$$= 66$$

• En base 12, il y a douze chiffres. Comme nous n'avons que 10 chiffres dans notre système décimal, on prend souvent pour les deux derniers chiffres α pour le chiffre 10 et β pour le chiffre 11. Les douze chiffres sont donc : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α et β.

$$\overline{1\ \alpha\ 6}^{12} = 1 \times 12^2 + 10 \times 12^1 + 6 \times 12^0$$

$$= 144 + 120 + 6$$

$$= 270$$

2) *Conversion de la base 10 vers la base b*

PROPRIETE

Pour déterminer l'écriture d'un nombre dans notre système de numération dans un système en base b, on effectue des divisions successives de ce nombre par b. On obtient le nombre en base b, en prenant le dernier quotient et en remontant tous les restes de ces divisions.

• Donner l’écriture de 496 en base 7

$$\begin{array}{r|l} 496 & 7 \\ \cline{2-2} 6 & 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & 7 \\ \cline{2-2} 0 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$

$$496 = 1 \times 7^3 + 3 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 6 \times 7^0 = \overline{1\,306}^7$$

• Donner l’écriture de 2 278 en base 12

$$\begin{array}{r|l} 2\,278 & 12 \\ \cline{2-2} 107 & 189 \\ 118 & \\ 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 189 & 12 \\ \cline{2-2} 69 & 15 \\ 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 12 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$

$$2\,278 = 1 \times 12^3 + 3 \times 12^2 + 9 \times 12^1 + 10(\alpha) \times 12^0 = \overline{139\,\alpha}^{12}$$

• Donner l’écriture de 149 en base 2

On utilise un procédé un peu différent car le nombre de divisions par 2 devient vite assez important. On connait les puissances de 2 :

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, ……

On effectue alors des soustractions successives de puissance de 2. On a alors :

$$\begin{aligned} 149 &= 1 \times 128 + 1 \times 16 + 1 \times 4 + 1 \\ &= 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= \overline{10\,010\,001}^2 \end{aligned}$$