PROBABILITÉS CONDITIONNELLES – LOI BINOMIALE

I) RAPPELS

1) Définition

• **EXPERIENCE ALEATOIRE**

Une expérience aléatoire est un protocole précis dont on ne peut pas prévoir l'issue mais qui peut être vérifiée.

Exemples

1) Lancer un dé à 6 faces.
2) Tirer simultanément 2 boules dans une urne qui en contient 8.
3) Distribuer 5 cartes à un joueur avec un jeu de 32 cartes.
4) Poser une question à un lycéen choisi au hasard.

• **UNIVERS**

Ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire. On le note : Ω. On a alors $\Omega = \{e_1\ ;\ e_2\ ; \dots ;\ e_n\}$.

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces, on a $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.

• **EVENEMENT**

Sous-ensemble de l'univers Ω.

Exemple : Soit l'évènement : *« obtenir un nombre pair avec le lancement d'un dé »*.

On a alors $E = \{2\,;4\,;6\}$

• **EVENEMENT ELEMENTAIRE**

Evènement qui ne contient qu'un seul élément. On le note alors e_i.

• **EVENEMENT CERTAIN**

C'est l'univers Ω.

• **EVENEMENT IMPOSSIBLE**

C'est l'ensemble vide $\emptyset$.

2) Opération sur les évènements

a) Evènement contraire

DEFINITION : ***on appelle évènement contraire d'un évènement A, l'évènement noté $\bar{A}$ composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.***

$$x \in \bar{A} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Omega \quad et \quad x \notin A$$

Exemple : *On lance un dé parfait. On appelle A l'évènement « obtenir un 6 ». On a donc l'évènement contraire $\overline{A}$: « ne pas obtenir 6 ».*

b) Intersection de deux évènements

DEFINITION : *on appelle intersection de deux évènements A et B, l'évènement noté $A \cap B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A et à B. On a alors le schéma suivant :*

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \;\; et \;\; x \in B$$

On dit que les évènements A et B sont incompatibles si et seulement si :

$$A \cap B = \emptyset$$

Exemple : *On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Soient les évènements :*

- *A* : *« obtenir deux cœurs ».*
- B : *« obtenir au moins une dame ».*

L'évènement $A \cap B$ est donc : « *».*

c) Union de deux évènements

DEFINITION : *on appelle union de deux évènements A et B, l'évènement noté $A \cup B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A ou (non exclusif) à B. On a alors le schéma suivant :*

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \;\; ou \;\; x \in B$$

On dit que les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω car :

$$A \cup \overline{A} = \Omega \;\; et \;\; A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Exemple : *On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Soient les évènements :*

- *A* : *« obtenir deux cartes de même valeur ».*
- B : *« obtenir un roi ».*

L'évènement $A \cup B$ est donc : « *».*

3) Probabilité

DEFINITION : *On appelle loi de probabilité sur un ensemble Ω, la fonction P à valeur dans $[0\,;1]$ définie par les conditions suivantes :*

- $p(\Omega) = 1$
- **Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.**

On peut alors démontrer les propriétés suivantes (*mais ça, vous pouvez le faire…*)…

***PROPRIETES* : Soit $e_1, e_2, \dots, e_n$ les n évènements élémentaires de l'univers Ω. De la définition précédente, on en déduit :**

- $\boldsymbol{p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1}$.
- $\boldsymbol{p(\emptyset) = 0}$.

- ***Pour tous les évènements A et B, on a les relations suivantes :***

  a) $\boldsymbol{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$.

  b) $\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$.

EXEMPLES

1) On lance un dé truqué. Après un relevé statistique, on a pu déterminer que les probabilités d'apparition de chaque face sont telles que :
$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) \quad et \quad p(6) = 3 \times p(1)$$
Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.
2) On donne les probabilités suivantes pour les évènements A et B :
$$p(A) = 0{,}3 \;\; ; \;\; p(A \cup B) = 0{,}7 \quad et \quad p(A \cap B) = 0{,}2.$$
Calculer $p(\overline{B})$.

REPONSE

4) Loi équiprobable

***DEFINITION* : On appelle loi de probabilité équirépartie, la loi de probabilité où chaque évènement élémentaire a la même probabilité d'apparition (équiprobabilité).**

Si Ω se décompose en n évènements élémentaires, on a :

$$\boldsymbol{\forall\, i \in \{1\,;2\,;\dots\dots;n\} \qquad on\ a \qquad p(e_i) = \frac{1}{n}}.$$

EXEMPLE *: pour un dé à jouer équilibré, chaque face a une probabilité d'apparition de* $\frac{1}{6}$.

***THEOREME* : Dans une loi équirépartie, la probabilité de l'évènement A vérifie :**

$$\boldsymbol{p(A) = \frac{nombre\ d'éléments\ de\ A}{nombre\ d'éléments\ de\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}.$$

REMARQUE : ***Lorsque la loi de probabilité revient à un problème de dénombrement. On peut alors utiliser pour dénombrer les différents cas : un arbre, un tableau double entrée, diagramme de Venn, une liste,…***

EXEMPLE : *Une urne contient 6 boules : 4 rouges (numérotées de 1 à 4) et 2 bleues (numérotées de 5 à 6). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note sa couleur. Calculer la probabilité des évènements suivants :*

R : « tirer deux boules rouges » et C : « tirer deux boules de même couleur ».

REPONSE

5) Variable aléatoire

DEFINITION :

- ***Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer à chaque issue e_i de Ω un nombre x_i.***
- ***Définir une loi de probabilité de X consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité $p(X = x_i) = p_i$.***

On a alors : $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

- ***On appelle l'espérance mathématique de la variable X, la quantité notée $E(X)$ définie par :***

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + \ \dots\dots + p_nx_n$$

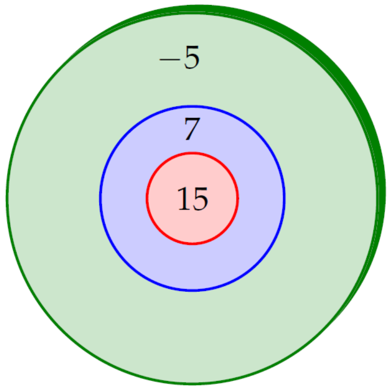
- ***On appelle variance et écart-type de la variable X, les quantités notées respectivement V(X) et $\sigma(X)$ définies par :***

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^2 - E^2(X) \qquad et \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}\,.$$

REMARQUE : ***L'espérance mathématique correspond à une moyenne des valeurs prises, pondérées par les probabilités de la loi définie sur X. Si par exemple, X représente le gain pour un jeu, $E(X)$ représente le gain moyen que peut espérer le joueur. On dit alors que si $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur et si $E(X) < 0$, le jeu est favorable à l'organisateur.***

EXEMPLE : Dans un jeu de fléchettes, la cible est constituée de disques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm et 20 cm.

Un joueur atteint toujours la cible et on admet que la probabilité qu'il atteigne une zone de cette cible est proportionnelle à l'aire de cette zone. Lorsqu'il atteint la zone rouge, il gagne 15 €, lorsqu'il atteint la couronne bleue, il gagne 7 €. En revanche, si la fléchette atteint la couronne verte, il perd 5 €.



On appelle X la variable aléatoire qui indique le gain du joueur.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?
3) Calculer la variance et l'écart-type de X.

REPONSE

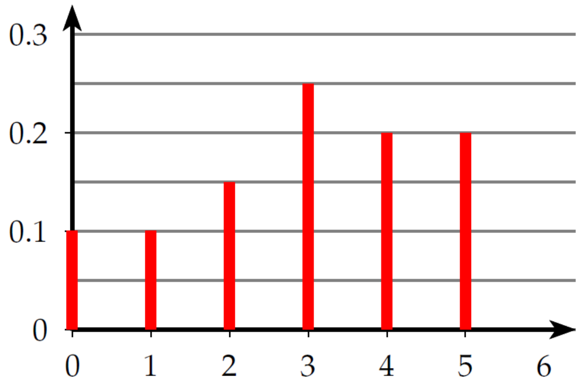
6) Propriétés de l'espérance et de la variance

PROPRIETE : X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Alors pour tous réels a et b, on a :

$$E(aX+b) = aE(X)+b \qquad et \qquad V(aX+b) = a^2V(X).$$

REMARQUE : *Le calcul de l'espérance est donc une* ***opération linéaire.***

EXEMPLE : Un professionnel vend des fauteuils.



Sa commission est de 200 € par fauteuil vendu, et ses frais sont de 280 € par jour. Une étude statistique a montré que la variable aléatoire X qui indique le nombre x de fauteuils vendus par jour suit la loi représentée ci-contre. On note Y la variable aléatoire donnant le gain journalier du vendeur.

1) Donner la relation entre X et Y.
2) Quelle est la probabilité que le vendeur soit en déficit à la fin de la journée ?
3) Quel gain moyen journalier peut-il espérer ?

REPONSE

REMARQUE : On peut calculer la variance et l'écart-type de Y. On a :

On obtient alors :

II) PROBABILITE CONDITIONNELLE

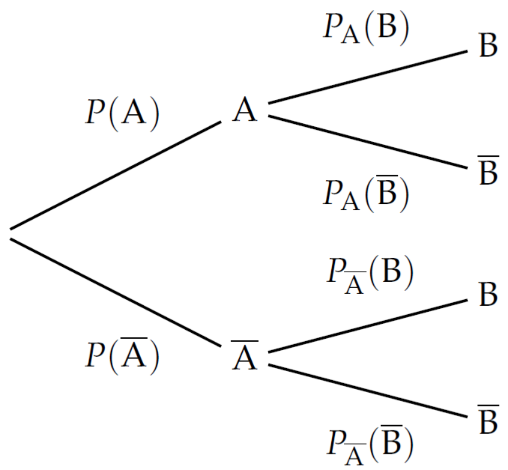
1) Définition

DEFINITION : ***Lorsque $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité d'avoir l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé. On a alors la relation suivante :***

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

2) Représentation par un arbre pondéré

Soient deux évènements A et B. On peut représenter par un arbre pondéré les probabilités suivantes lorsque l'on connaît les probabilités de B ou $\overline{B}$ lorsque A est réalisé.



EXEMPLE : Dans un lycée, 54 % des élèves sont des filles dont 72 % sont externes. De plus, 76 % des garçons sont externes. On choisit un élève au hasard.

REMARQUE : On note la probabilité qu'une fille soit externe : $p_F(E)$.

PROPRIETES : Pour remplir et utiliser un arbre, on a les propriétés suivantes :

• Sur chaque branche de l'arbre, on écrit les probabilités correspondantes (attention, pas de pourcentage).

• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

• Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des évènements placés sur ce chemin. Par exemple, la probabilité d'avoir une fille externe :

$$\boldsymbol{p(F) \times p_F(E) = p(F \cap E) = 0,54 \times 0,72 = 0,3888}$$

***• La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet évènement. Par exemple, la probabilité d'avoir un élève externe* :**

$$\boldsymbol{p(E) = p(E \cap F) + p(E \cap G) = 0,54 \times 0,72 + 0,46 \times 0,76 = 0,7384}$$

AUTRE EXEMPLE : Dans un atelier, il y a 2 % de pièces défectueuses. On effectue un test pour savoir si on doit accepter ou refuser une pièce. On a observé que :

- Si la pièce est bonne, elle est acceptée par ce test à 96 %.
- Si la pièce est défectueuse, elle est refusée par ce test à 97 %.

Quel est le pourcentage de retour client ?

REPONSE :

THEOREME : **« PROBABILITES TOTALES »**

Soit $A_1, A_2, \dots\dots, A_n$ une partition de l'univers Ω (ensembles deux à deux incompatibles et dont l'union forme Ω), alors, pour tout évènement B, on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots\dots + p(A_n \cap B)$$

REMARQUE : Dans la plupart de ces cas, on utilise la partition A et $\overline{A}$.

3) Évènements Indépendants

DEFINITION : On dit que deux évènements sont indépendants si et seulement si :

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ **ou lorsque** $p(A) \neq 0$ $p_A(B) = p(B)$.

REMARQUE : On dit que les évènements sont indépendants car la probabilité de B ne dépend pas de A, que A soit réalisé ou non.

EXEMPLE : Une association de 96 membres propose différentes activités à ses adhérents dont l'aviron et le badminton.

Douze membres s'inscrivent pour l'aviron, trente-deux pour le badminton dont quatre pour les deux.

On prend au hasard la fiche d'un adhérent.

On note A et B les évènements :

- A : « l'adhérent est inscrit pour l'aviron ».
- B : « l'adhérent est inscrit pour le badminton ».

Les évènements A et B sont-ils indépendants ? En est-il de même pour A et $\overline{B}$.

REPONSE :

THEOREME : *Si les évènements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour :*

1) $\overline{A}$ et B	2) A et $\overline{B}$	3) $\overline{A}$ et $\overline{B}$

DEMONSTRATION **ROC**

III) LOI BINOMIALE

1) Conditions

• **Épreuve de Bernoulli** : *expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : succès ou échec. On appelle p la probabilité de succès et $q = 1 - p$ la probabilité d'échec.*

• **Schéma de Bernoulli d'ordre n** : *expérience aléatoire qui est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On définit alors la variable aléatoire X représentant le nombre de succès.*

2) Loi binomiale de paramètres n et p

THEOREME : ***Dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre de succès est définie par :***

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

REMARQUE :

- $\binom{n}{k}$ est un coefficient binomial. Il correspond au nombre de possibilités de placer k succès sur n expériences.
- Avec la calculatrice : Calcul des coefficients binomiaux $\mathcal{B}(10\,;0.3)$.

Casio : Graph 35+ et modèles sup.	*Texas : TI82 Stats et modèles sup.*
Calcul des coefficients binomiaux Dans le **Menu RUN,** appuyer sur la touche **OPTN**, puis choisir **PROB**. **Pour calculer** $\binom{10}{3}$, taper **10**, puis choisir **nCr**, puis taper **3** et **EXE**.	Calcul des coefficients binomiaux **Pour calculer** $\binom{10}{3}$, taper **10**, puis appuyer sur la touche **MATH**, choisir le menu **PRB,** puis choisir **nCr** ou **Combinaison** (version fr), puis taper **3** et **ENTER**.

Par exemple, pour calculer $\binom{10}{4}$: *on trouve* 210 (*enfin normalement* ...)

EXEMPLE : On lance 10 fois de suite un dé cubique.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement quatre fois un 6 ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins quatre fois un 6 ?

REPONSE :

- Avec la calculatrice :

Loi de probabilité d'une loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0.3)$.

<table>
<tr><th>Casio : Graph 35+ et modèles sup.</th><th>Texas : TI82 Stats et modèles sup.</th></tr>
<tr><td>
<u>Calcul des probabilités</u> P (X=k)
Menu▶ STAT▶ DIST▶ BINM▶ BPD
Pour calculer P (X=2)
Binomial P.D.
Data : Variable
Choisir ici « Variable »
x : 2 Placer ici la valeur de k
Numtrial : 10 Placer ici la valeur de n
P : 0.3 Placer ici la valeur de p
Save Res :None
Execute
CALC Pour calculer, appuyer sur F1
Après exécution on obtient :
Binomial P.D
P=0.23347444
</td><td>
<u>Calcul des probabilités</u> P (X=k)
Menu▶ 2nd DISTR (ou ▶ Distrib)


Pour calculer P (X=2)
Menu ▶ 2nd DISTR ▶ Binompdf
ou ▶ BinomFdp (version fr)
Compléter les paramètres : n , p , k
Binompdf(10,0.3, 2)
Après exécution on obtient :
0.2334744405
</td></tr>
</table>

<u>*Fonction de répartition*</u> d'une loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0.3)$.

<table>
<tr><th>Casio : Graph 35+ et modèles sup.</th><th>Texas : TI82 Stats et modèles sup.</th></tr>
<tr><td>
<u>Calcul des proba. cumulées</u> P (X ≤ k)
Menu▶ STAT▶ DIST▶ BINM▶ BCD
Pour calculer P (X ≤ 7)
Binomial C.D. (C pour Cumulées)
Data : Variable
Choisir ici « Variable »
x : 7 Placer ici la valeur de k
Numtrial : 10 Placer ici la valeur de n
P : 0.3 Placer ici la valeur de p
Save Res :None
Execute
CALC Pour calculer, appuyer sur F1
Après exécution on obtient :
Binomial C.D
P=0.99840961
</td><td>
<u>Calcul des proba. cumulées</u> P (X ≤ k)
Menu ▶ 2nd DISTR (▶ Distrib)


Pour calculer P (X ≤ 7)
Menu ▶ 2nd DISTR ▶ Binomcdf
ou ▶ BinomFrép (version fr)
Compléter les paramètres : n , p , k
Binomcdf(10,0.3,7)
Après exécution on obtient :
.9984096136
</td></tr>
</table>

3) Propriétés des coefficients binomiaux

THEOREME : ***Pour tous les entiers naturels n et k, tels que $0 \leq k \leq n$, on a :***

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$	3) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$	4) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

FORMULE DE PASCAL

EXEMPLE :

$$\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = 1 \quad ; \quad \binom{8}{1} = \binom{8}{7} = 8 \quad ; \quad \binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$$

REMARQUE :

• On a la troisième égalité car placer k succès parmi n expériences revient à placer $n - k$ échecs parmi n expériences.

• Pour comprendre la quatrième égalité, on décompose la répartition de $k + 1$ succès sur $n + 1$ expériences de la façon suivante :

- Soit il y a succès à la première expérience. Il faut alors répartir k succès sur les n expériences restantes soit $\binom{n}{k}$.
- Soit il y a échec à la première expérience. Il faut alors répartir $k + 1$ succès sur les n expériences restantes soit $\binom{n}{k+1}$.

TRIANGLE DE PASCAL

La dernière formule est appelée **FORMULE DE PASCAL** car elle permet de calculer de proche en proche les coefficients du triangle de Pascal :

On a pour les cases surlignées :

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$$

Ce qui donne $4 + 6 = 10$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

4) Représentation de la loi binomiale

a) Représentation symétrique

On lance 8 fois une pièce de monnaie. Déterminer et représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de « piles » obtenus.

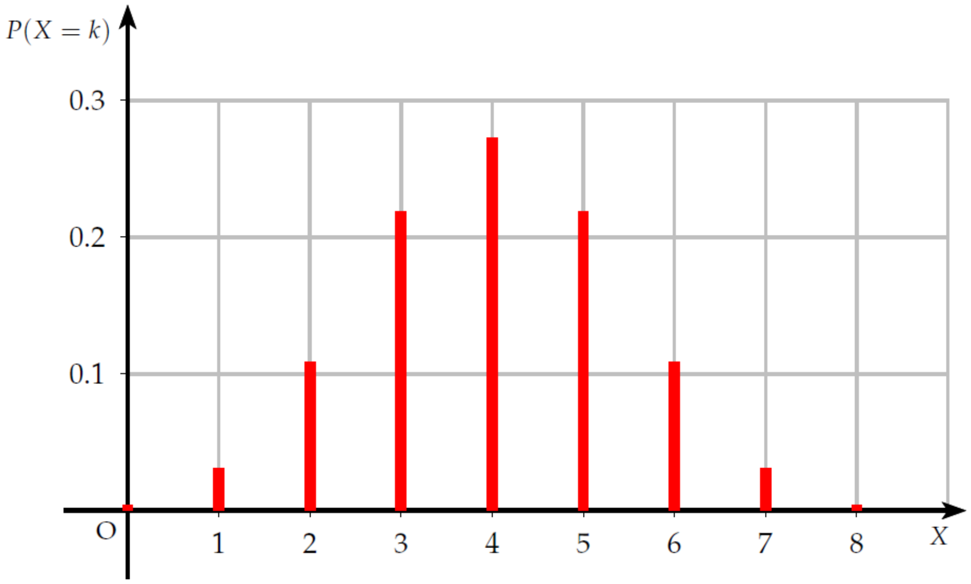
Les 8 lancers sont à priori indépendants car la pièce est lancée toujours de la même façon. La probabilité sur un lancer d'obtenir « pile » est de 0,5 (on suppose que la pièce est équilibrée).

On obtient alors :

On obtient alors le tableau de la loi de probabilité (à 10^{-3}) suivant :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=k)$	0,004	0 031	0,109	0,219	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004

On obtient la représentation de la loi binomiale $\mathscr{B}(8\,;0{,}5)$:



Remarque : *Cette distribution est symétrique car la probabilité de succès est égale à la probabilité d'échec.*

b) *Autre représentation* : asymétrique

Une urne contient 10 boules (indiscernables au toucher) : 4 boules sont rouges et les autres sont noires. On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant la boule à chaque tirage.

Déterminer et représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de boules rouges obtenues.

Les 6 lancers sont indépendants car la boule est remise dans l'urne à chaque fois. La probabilité sur un tirage d'obtenir une boule rouge est de 0,4 (les boules sont indiscernables au toucher).

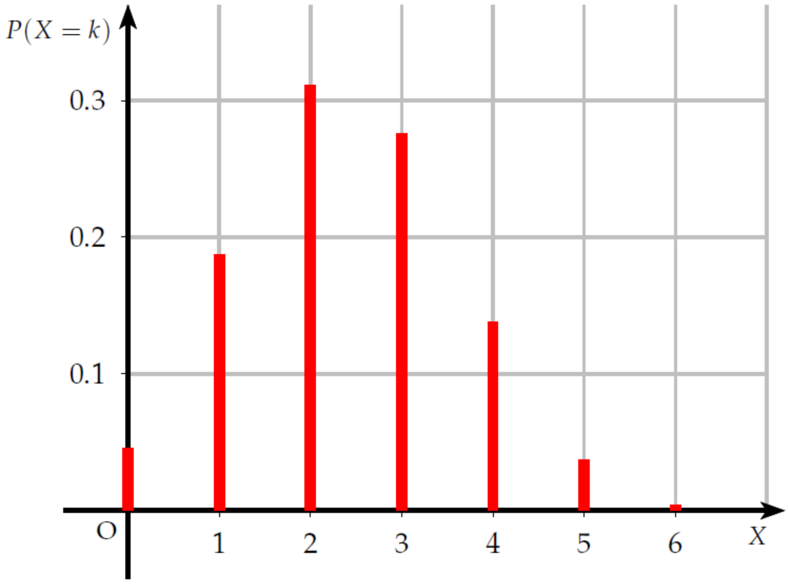
On obtient alors :

On obtient les différentes valeurs avec la calculatrice avec

On obtient alors le tableau de la loi de probabilité (à 10^{-3}) suivant :

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,046	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

On obtient la représentation de la loi binomiale $\mathscr{B}(6\,;0{,}4)$:



5) Espérance et Variance

THEOREME : X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$, alors l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ sont égales à :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Ce théorème est admis…

EXEMPLE :

Une urne contient 10 boules (indiscernables au toucher) ; 4 boules sont rouges et les autres sont noires. On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant la boule à chaque tirage.

Quel nombre moyen de boules rouges peut-on espérer ? Avec quelle variance et quel écart-type ?

REPONSE :