NOMBRES COMPLEXES

I- Forme algébrique d'un nombre complexe :

1) Définitions :

DEFINITIONS

On appelle **ensemble des nombres complexes**, et on note $\mathbb{C}$, un ensemble contenant $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) tel que :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ et qui suivent les mêmes règles de calcul.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe s'écrit sous la forme $a + bi$ où a et b sont des réels.
- On le note généralement z.

Exemples :

$1 - 2i$; $4 + 9i$ et $-i$ sont des nombres complexes.

PROPRIETE

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est unique.

+démonstration.

DEFINITIONS

Soit z un nombre complexe.

- L'écriture $z = a + bi$, où a et b sont des réels, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.
- a est appelé partie réelle de z.
- b est appelé partie imaginaire de z.

On note $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$.

Exemples :

$Re(1 - 2i) = 1$; $Im(4 + 9i) = 9$

$Re(15i) = 0$: un nombre complexe de forme algébrique bi avec $b \epsilon \mathbb{R}$ est appelé **imaginaire pur.**

$Im(3) = 0$: la partie imaginaire d'un nombre réel est nulle. On retrouve ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

PROPRIETE

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

C'est-à-dire que si a , a' , b et b' sont des réels, on a :

$$a + bi = a' + b'i \quad \Leftrightarrow \quad (a\,;\,b) = (a'\,;\,b')$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

+ démonstration.

Exercice :

1) Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$.

Calculer et écrire sous la forme algébrique : $z + z'$; $z - z'$; $2z - 3z'$; $z \times z'$ et z^2.

(Si votre calculatrice le permet, vérifier le résultat)

2) Soit $z = a + 2 + i(-ia + a) + 2i - 5ia$.

a- A quelle condition z est-il un réel ?

b- A quelle condition z est-il un imaginaire pur ?

3) **a-** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z + 6i = z - 2$.

b- Montrer que $z^2 - 6z + 25 = (z-3)^2 + 16$

c- En déduire les solutions de l'équation $z^2 - 6z + 25 = 0$.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{-i}{z+1} = 2$. Donner z sous forme algébrique.

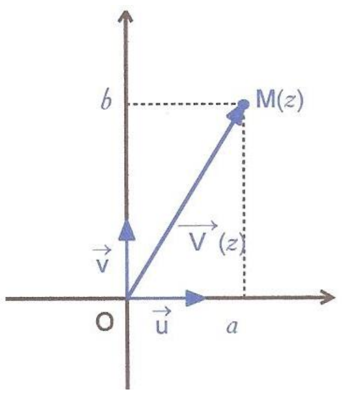
2) Représentation dans le plan complexe :

DEFINITIONS

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

Au point M de coordonnées (a ; b), on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de M ou que $M(a\,;\,b)$ est **L'image ponctuelle** de $z = a + bi$.



Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $\binom{a}{b}$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

On dit que $z = a + bi$ est **l'affixe** de $\vec{V}$ ou que $\vec{V}\binom{a}{b}$ **est l'image vectorielle** de $z = a + bi$.

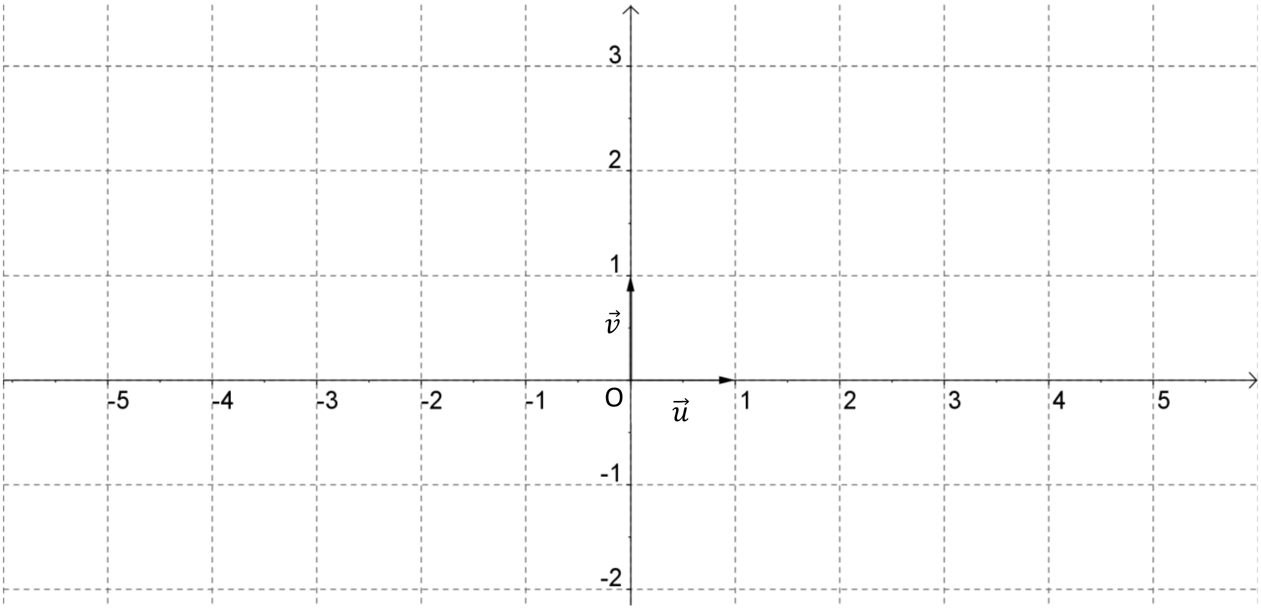
Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormé direct, on dit qu'on se place dans le **plan complexe.**

Exercice :

Placer dans le plan complexe, les points d'affixe :

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2i$; $z_4 = 2 - i$; $z_5 = i$; $z_6 = -i$; $z_7 = 1$; $z_8 = -i - 3$

$z_9 = 2z_1 - 3z_2$; $z_{10} = z_3(z_4 - z_2)$.



PROPRIETES

Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$ avec a , b , a' et b' réels, alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$;
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $MM' = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$
- Le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z+z'}{2}$

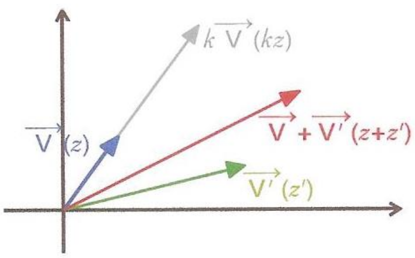
\+ démonstration.

PROPRIETES

Si $\vec{V}$ a pour affixe z et $\vec{V'}$ pour affixe z', alors $\vec{V} + \vec{V'}$ a pour affixe $z + z'$.

Si k est un réel, alors $k\vec{V}$ a pour affixe kz.

\+ démonstration.



Exercice :

1) Etant donné un point M d'affixe $z = a + bi$, avec a et b réels, placer :

- Le point M' d'affixe $z' = a - bi$
- Le point M'' d'affixe $z'' = -a + bi$
- Le point M''' d'affixe $z''' = -a - bi = -z$

2) **a-** Calculer $(3 + 2i)(3 - 2i)$. En déduire la forme algébrique de $\frac{1}{3+2i}$

b- Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{1+i} \quad ; \quad \frac{1}{3-i} \quad ; \quad \frac{1}{i}$$

3) Inverse et quotient :

PROPRIETE (admise)

Tout nombre complexe z non nul admet dans $\mathbb{C}$ un inverse noté $\frac{1}{z}$

DEFINITION

Soit z' un nombre complexe non nul. On définit le quotient $\frac{z}{z'}$ par $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$

4) Conjugué d'un nombre complexe :

DEFINITION

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + bi$.

On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = a - bi$.

Remarque :

Si M est le point d'affixe z alors le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice :

Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$.

Calculer $\bar{z}$; $\overline{z'}$; $\bar{z} + \overline{z'}$; $z + z'$; $\overline{z + z'}$; $\bar{z}.\overline{z'}$; $z\,z'$ et $\overline{z\,z'}$.

PROPRIETES

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

* $\overline{\overline{z}} = z$
* $z.\bar{z}$ est un réel positif
* $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
* $\overline{z - z'} = \bar{z} - \overline{z'}$
* $\overline{z\,z'} = \bar{z}.\overline{z'}$
* si $z' \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$
* $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
* $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
* z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$
* z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = -\bar{z}$

+ démonstration.

Exercice :

1) Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{2 + 7i} \quad ; \quad \frac{4}{\sqrt{3} - i} \quad ; \quad \frac{2 - i}{5 + 3i} \quad ; \quad \frac{i}{1 - 3i} \quad ; \quad \frac{2 + i}{i}$$

2) Résoudre l'équation $(1 + i)z = 3 - 2i$, donner la solution sous la forme algébrique.

3) Le nombre complexe $2 - i$ est-il solution de l'équation $(1 - i)z + 1 + 3i = 0$?

4) Le nombre complexe $\frac{1+3i}{5}$ est-il solution de l'équation $5z^2 - 2z + 2 = 0$?

5) Ecrire plus simplement le nombre complexe : $A = \frac{\sqrt{7}+5i}{2\sqrt{7}-2i} + \frac{2\sqrt{7}-2i}{\sqrt{7}+5i}$.

II- Forme trigonométrique – Module – Argument :

1) Forme trigonométrique :

DEFINITION

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$.

On dit que $\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ est <u>une forme trigonométrique</u> de z.

PROPRIETE

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors :

$$z = z' \Leftrightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \quad [2\pi] \end{cases}$$

+ démonstration.

2) Module :

DEFINITION

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + bi$ et soit M, le point d'affixe z.

On appelle **module** de z le nombre réel positif $\boldsymbol{r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}}$.

On note $\boldsymbol{r = |z|}$.

Remarque :

La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a : $r = OM = |x|$.

Pour tout $\in \mathbb{R}$, $|x|$ peut se lire indifféremment « valeur absolue de x » ou « module de x ».

Pour un nombre complexe non réel z, $|z|$ se lit impérativement « module de z ».

Exemple :

On donne $z = 3 + 4i$ et M, le point d'affixe z.

$OM = \sqrt{3^2 + 4^2} \quad \rightarrow \quad OM = \sqrt{9 + 16} \quad \rightarrow \quad OM = \sqrt{25} = 5$ donc $|z| = 5$

Exercice :

1) Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 - i \quad ; \quad z_2 = 5 - \frac{i}{2} \quad ; \quad z_3 = 3 \quad ; \quad z_4 = i - 4 \quad ; \quad z_5 = i \quad ; \quad z_6 = -5 \quad ; \quad z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

2) Placer les points correspondants aux affixes données dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ et, en faisant apparaitre les éléments sur un dessin, donner les formes trigonométriques de : $z_1 = 1 + i \quad ; \quad z_2 = \sqrt{3} + i \quad ; \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad z_4 = i$.

PROPRIETES

- Soit $\vec{V}$ un vecteur d'affixe z. On a $\|\vec{V}\| = |z|$
- Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. On a $AB = |z_B - z_A|$.

+ démonstration.

Exercice :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$ et $z_B = 5 - i$.

Calculer les distances OA , OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

PROPRIETES

* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
* $|-z| = |z|$
* $|\bar{z}| = |z|$
* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
* $z\,\bar{z} = |z|^2$ (donc $z\,\bar{z} \in \mathbb{R}^+$)
* si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
* $|z\,z'| = |z|.|z'|$
* si $z' \neq 0$ alors $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

+ démonstration.

<u>Exercice :</u>

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$(7+35i)(3+2i) \quad ; \quad \frac{7-35i}{3-2i} \quad ; \quad \frac{(5+3i)(1+i)}{4+i}$$

2) Déterminer tous les points M d'affixe z tels que $z\,\bar{z} = 4$.

3) On considère le point A d'affixe 2+3i.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-(2+3i)| = 5$

4) Soit $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculer $|j|$. Démontrer que $j^2 = \bar{j}$. En déduire que $j^3 = 1$.

3) <u>Argument :</u>

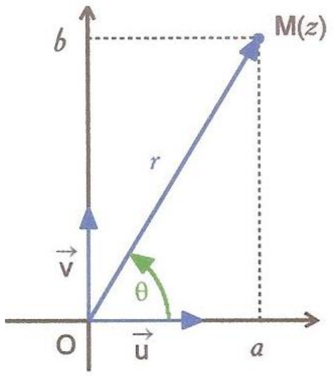
DEFINITION

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z.

On appelle argument de z tout nombre θ réel tel que :

$$\boldsymbol{\theta = (\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})\ [2\pi]}.$$

On note $\boldsymbol{\theta = \arg(z)}$



<u>Remarques :</u>

- θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo 2π.
- Lorsque $z = 0$, on ne peut pas définir d'argument car il n'y a pas d'angle $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$.

III- Propriétés de calcul et forme exponentielle :

Introduction :

Ecrire sous la forme trigonométrique : $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$ et $\dfrac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)}$

1) Propriétés :

PROPRIETES

Soient θ et θ' deux réels et soient z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ'. On a :

* $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$ $\quad$ $\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
* $\dfrac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ $\quad$ $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z\ [2\pi]$
* $\dfrac{(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')$ $\quad$ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'\ [2\pi]$
* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\arg(z\,)^n = n\arg(z)\ [2\pi]$
* $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ $\quad$ $\arg(\bar{z}) = -\arg z\ \ [2\pi]$
* $-(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)$ $\quad$ $\arg(-z) = \arg z + \pi\ [2\pi]$

+ démonstration.

PROPRIETE

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique.

$\bar{z}$ et $-z$ ont pour forme trigonométrique :

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \text{ et } -z = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$$

+ démonstration.

Exercice :

Soient $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

En déduire les formes trigonométriques de : $z_1 \times z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $(z_1)^3$; $\bar{z_1}$ et $\dfrac{(z_1)^2}{\bar{z_1}}$.

2) Forme exponentielle :

D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres.

C'est-à-dire que la fonction : $\theta \longmapsto \varphi(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ est telle que $\varphi(\theta+\theta') = \varphi(\theta) \times \varphi(\theta')$.

Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle ($e^{a+b} = e^a \times e^b$).

NOTATION

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et par conséquent, pour $r \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Cette notation d'un nombre complexe est appelée **notation exponentielle.**

PROPRIETES

Les résultats déjà vus s'écrivent, en utilisant la notation exponentielle :

* $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
* $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$
* $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
* $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = e^{ni\theta}, n \in \mathbb{Z}$
* $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
* $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Remarques :

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les formules d'addition :
$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta'\sin\theta$$
- La propriété $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{2i\theta}$ permet de retrouver les formules de duplication :
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
- On peut vérifier que :
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$
- La relation $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$, est appelée formule de **MOIVRE.**

Exercices :

1) On considère les nombres complexes :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \;;\; z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} \;;\; z = \frac{z_1}{z_2}$$

a) Donner la forme exponentielle de z.

b) Donner les formes algébriques de z_1 et z_2. En déduire la forme algébrique de z.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2) Ecrire sous la forme trigonométrique et sous la forme exponentielle les nombres complexes :

$$a = 3 + \sqrt{3}i \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{2}}{1-i} \quad ; \quad c = \frac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}} \quad ; \quad d = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Remarque :

Les calculatrices permettant d'utiliser les nombres complexes peuvent passer (de façon plus ou moins efficace) de la forme algébrique à la forme exponentielle et inversement :

Casio®

Nombres complexes Se placer en SHIFT MENU Rad.

Utiliser SHIFT 0 (i) pour obtenir le nombre i.

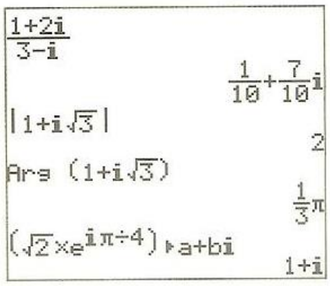
Calculer sur les complexes : OPTN CPLX

Arg pour calculer un argument d'un complexe non nul.

Abs pour calculer le module d'un complexe.

▶ **a + bi** pour obtenir la forme algébrique du complexe précédent.

▶ **r ∠ θ** pour obtenir la forme exponentielle du complexe précédent.



TI™

Nombres complexes Se placer en mode RADIAN

Utiliser 2nde ⊡ pour obtenir le nombre i.

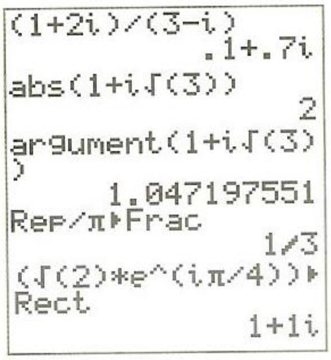
Calculer sur les complexes math CPX

4 : argument(pour calculer un argument d'un complexe non nul

5 : abs(pour calculer le module d'un complexe

6 : ▶ Rect pour obtenir la forme algébrique du complexe précédent

7 : ▶ Polaire pour obtenir la forme exponentielle du complexe précédent



IV- Equation de degré 2 à coefficients réels :

1) Activité :

a) On considère l'équation (E): $z^2 - 4z - 5 = 0$.

Montrer que : $(E) \Leftrightarrow (z-2)^2 - 9 = 0$ et en déduire les solutions de (E).

b) On considère l'équation (F): $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Montrer que $(F) \Leftrightarrow (z-2)^2 + 9 = 0$ et, en remarquant que $9 = -(3i)^2$, trouver les solutions de (F).

2) Propriétés :

PROPRIETES

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des réels $(a \neq 0)$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

* Si $\Delta \geq 0$, les deux solutions sont réelles: $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

* Si $\Delta < 0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans les deux cas, si on pose $\Delta = \delta^2$ (avec δ réel lorsque $\Delta \geq 0$ et δ imaginaire pur si $\Delta < 0$), on peut écrire: $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$

Le trinôme $az + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme $az + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

+ démonstration.

Remarque :

Le discriminant est un outil commode, mais il n'est pas toujours indispensable.

Il est inutile de l'utiliser, par exemple, pour résoudre l'équation $z^2 + 3 = 0$.

Exercices :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad ; \quad z^2 + 3z - 4 = 0 \quad ; \quad 4z^2 - 4z + 1 = 0 \quad ; \quad 2z^2 - 5z + 7 = 0$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad 2z^2 - 2(1 + \cos\theta)z + 1 + \cos\theta = 0 \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \quad ; \quad z^4 + 4z^2 + 3 = 0$$

V- Calculs de longueurs et d'angles :

Rappel : un module correspond à une distance et un argument correspond à un angle.

PROPRIETES

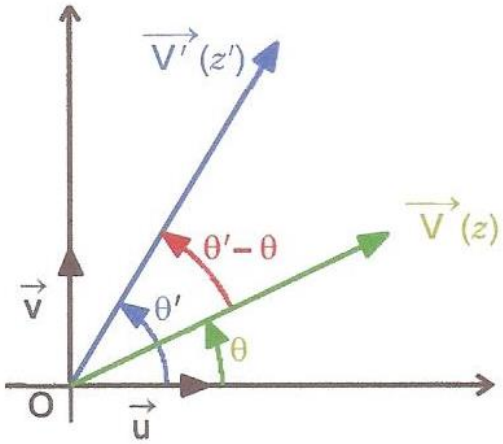
Soient $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ d'affixes respectives z et z' dons le plan complexe rapporté au repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Si z et z' ont pour forme trigonométriques :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

alors:

* $\left(\vec{u}\,;\vec{V}\right) = \theta = \arg z\ [2\pi]$
* $\left(\vec{V}\,;\vec{V'}\right) = \theta' - \theta = \arg z' - \arg z\ [2\pi]$



+ démonstration.

PROPRIETES

A, B, C et D étant des points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D dans le plan complexe de repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, alors :

* Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et on a :

$AB = |z_B - z_A|$ et $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$

* $\dfrac{CD}{AB} = \left|\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$ et $\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$

$$= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$$

* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur.

* A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}\,, k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi]$$

+ démonstration.

<u>Exercice :</u>

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère A , B et C d'affixes respectives $a = 1$, $b = 1 + 2i$ et $c = 1 + \sqrt{3} + i$.

Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$ et l'écrire sous la forme exponentielle. En déduire la nature du triangle ABC.