SUITES SE RAMENANT AUX SUITES ARITHMETIQUES OU GEOMETRIQUES - EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

Exercice n°2.

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2} \end{cases}$.

On pose $v_n = u_n^2$

1) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

Exercice n°3.

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier *n* par $u_n = 2n - 1$.

a) Montrez que (u_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez le premier terme u_0 et la raison *r*
b) Calculez en fonction de *n* la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 2^{u_n}$

c) Montrez que (v_n) est une suite géométrique pour laquelle vous préciserez le premier terme v_0 et la raison *q*
d) Calculez $P_n = v_0 \times v_1 \times ..... \times v_n$ en fonction de *n*.

Exercice n°4.

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2) Exprimer v_n en fonction de *n*.
3) En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

Exercice n°5.

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 10u_n - 9u_{n-1} \end{cases}$.

On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique
2) Exprimer v_n en fonction de *n*.
3) Démontrer que pour tout entier *n*, $u_n = v_0 + v_1 + v_2 + ...v_{n-1} + u_0$
4) En déduire une expression de u_n en fonction de *n*.

Exercice n°6.

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$.

1) On pose $s_n = u_{n+1} + u_n$. Montrer que (s_n) est une suite géometrique. En déduire l'expression de s_n en fonction de *n*.

2) On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et $t_n = v_{n+1} - v_n$. Exprimer t_n en fonction de s_n.

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*. (indication : calculer $t_0 + t_1 + ...t_{n-1}$ de deux façons).

Exercice n°7.

On considère la suite numérique *u* définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1 \end{cases}$$

Soit *v* la suite définie par : Pour tout entier *n*, $v_n = 4u_n - 6n + 15$

1) Montrer que *v* est une suite géométrique

2) Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de *n*

En déduire que pour tout entier naturel *n* : $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n - 15}{4}$

3) Montrer que la suite *u* peut s'écrire sous la forme *u* = *t* + *w* où *t* est une suite géometrique et *w* une suite arithmétique.

4) Calculer :

$T_n = t_0 + t_1 + ... + t_n$

$W_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$

$U_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

SUITES SE RAMENANT AUX SUITES ARITHMETIQUES OU GEOMETRIQUES - CORRECTION

Exercice n°1

1) Il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ en tant que quotient de deux quantités strictement positives

La suite (v_n) sera donc définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_{n+1}} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-\frac{u_n+4}{u_n+4}}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3\frac{u_n+4}{u_n+4}} = \frac{\frac{2u_n+3-(u_n+4)}{u_n+4}}{\frac{2u_n+3+3(u_n+4)}{u_n+4}}$$

$$= \frac{u_n-1}{u_n+4} \times \frac{u_n+4}{5u_n+15} = \frac{1}{5} \times \frac{u_n-1}{u_n+3} \boxed{= \frac{1}{5} v_n}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+3} = -\frac{1}{3}$

2) Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $-\frac{1}{3}$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$, on aura $v_n(u_n+3) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -3v_n - 1 \Leftrightarrow \boxed{u_n = \frac{-3v_n-1}{v_n-1}}$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{-3v_n-1}{v_n-1} = \frac{-3\left(-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)-1}{-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n-1} = \boxed{\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n-1}{-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n-1}}$

Exercice n°2

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1}^2 = \left(\sqrt{2+u_n^2}\right)^2 = 2 + u_n^2 \boxed{= v_{n+1} + 2}$ donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0^2 = 1^2 \boxed{= 1}$

2) Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + 2n = \boxed{1+2n}$ et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \sqrt{1+2n}}$

Exercice n°3

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = 2n - 1$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} - u_n} = 2(n+1) - 1 - (2n+1) \boxed{= 2}$. La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = -1$

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2} = (n+1)\frac{-1+2n-1}{2} = (n+1)(n-1) \boxed{= n^2 - 1}$

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 2^{u_n}$

a) On calcule $\boxed{v_{n+1}} = 2^{u_{n+1}} = 2^{u_n+2} = 2^{u_n} \times 2^2 \boxed{= 4v_n}$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $v_0 = 2^{u_0} = 2^{-1} \boxed{= \frac{1}{2}}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = v_0 \times v_1 \times ..... \times v_n = 2^{u_0} \times 2^{u_1} \times ....2^{u_n} = 2^{u_0+u_1+......u_n} \boxed{= 2^{n^2-1}}$ en fonction de n.

Exercice n°4

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\frac{n+1}{3n}u_n}{n+1} = \dfrac{1}{3n}u_n = \dfrac{1}{3}\dfrac{u_n}{n}\boxed{= \dfrac{1}{3}v_n}$

2) (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = \dfrac{1}{3}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \boxed{= \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, on aura $u_n = nv_n = \boxed{n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

Exercice n°5

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 10u_{n+1} - 9u_n - u_{n+1} = 9u_{n+1} - 9u_n = 9(u_{n+1} - u_n) = \boxed{9v_n}$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 9 et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 2$

2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 9^n}$

3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots.v_{n-1} + u_0$

$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots..(u_n - u_{n-1}) + u_0$

$= u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \ldots u_3 - u_2 + \ldots u_n - u_{n-1} + u_0 \boxed{= u_n}$

4) A partir de l'égalité $u_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots.v_{n-1} + u_0$, on calcule

$$u_n = \underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + \ldots.v_{n-1}}_{\substack{\text{somme des } n \text{ premiers termes} \\ \text{de la suite } v}} + u_0 = 2 \times \frac{1 - 9^n}{1 - 9} + 1 \boxed{= \frac{1}{4}(9^n - 1) + 1}$$

Exercice n°6

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on calcule $s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} = 8(u_{n+1} + u_n) = 8s_n$, donc la suite (s_n) est une suite géométrique de raison $q = 8$ et de premier terme $s_0 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{s_n = s_0 \times q^n = 8^n}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$t_n = (-1)^{n+1} u_{n+1} - (-1)^n u_n = (-1)^{n+1} u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1}(u_{n+1} + u_n) \boxed{= (-1)^{n+1}(s_n)}$

3) On calcule $t_0 + t_1 + \ldots\ldots t_{n-1}$ de deux façons :

D'une part

$t_0 + t_1 + \ldots\ldots t_{n-1} = (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \ldots. + (v_{n-1} - v_{n-2}) + (v_n - v_{n-1})$

$= v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + \ldots. + v_{n-1} - v_{n-2} + v_n - v_{n-1}$

$= v_n - v_0 = v_n - (-1)^0 u_0 \boxed{= v_n}$

D'autre part, on remarque que $(t_n)_n$ est une suite géométrique de raison -8 car $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{(-1)^{n+1+1}}{(-1)^{n+1}} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} = -8$ et de premier terme $t_0 = (-1)^{0+1}(s_0) = -1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_0 + t_1 + \ldots\ldots t_{n-1} = t_0 \dfrac{1 - (-8)^n}{1 - (-8)} \boxed{= -\dfrac{1}{9}\left[1 + (-8)^{n+1}\right]}$

En égalant les deux quantités, il vient $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{9}\left[1 + (-8)^{n+1}\right]}$ et par suite $\boxed{u_n = \dfrac{v_n}{(-1)^n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{9}\left[1 + (-8)^{n+1}\right]}$

Exercice n°7

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$$v_{n+1} = 4u_{n+1} - 6(n+1) + 15 = 4\left(\frac{1}{3}u_n + n - 1\right) - 6n - 6 + 15$$

$$= \frac{4}{3}u - 2n + 5 = \frac{1}{3}(4u_n - 6n + 15) = \frac{1}{3}v_n$$

$\boxed{\text{La suite } v \text{ est donc géométrique de raison } q = \frac{1}{3}}$

2) On calcule $v_0 = 4u_0 - 6\times 0 + 15 = 4\times 1 - 0 + 15 = 19$, et ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{19\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

En conséquence, puisque $v_n = 4u_n - 6n + 15$, on obtient :

$$u_n = \frac{1}{4}(v_n + 6n - 15) = \frac{1}{4}\left(19\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6n - 15\right) \boxed{= \frac{19}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6n-15}{4}}$$

3) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $t_n = \frac{19}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $w_n = \frac{6n-15}{4} = \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$,

la suite (t_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ car $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{19}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{19}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$,

et la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = \frac{3}{2}$ car

$$w_{n+1} - w_n = \frac{3}{2}(n+1) - \frac{15}{4} - \left(\frac{3}{2}n - \frac{15}{4}\right) = \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{15}{4} - \frac{3}{2}n + \frac{15}{4} = \frac{3}{2}$$

4) On calcule

$$T_n = t_0 + t_1 + \dots\dots + t_n = t_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{19}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{19}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \boxed{= \frac{57}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}$$

$$W_n = w_0 + w_1 + \dots\dots + w_n = (n+1)\frac{w_0 + w_n}{2} = (n+1)\frac{-\frac{15}{4} + \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}}{2} \boxed{= \frac{3(n-5)(n+1)}{4}}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = t_n + w_n$ on aura $\boxed{U_n = T_n + W_n = \frac{57}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3(n-5)(n+1)}{4}}$