SUITES NUMERIQUES

Ex 1 :

u est une suite définie sur $\mathbb{N}$ et croissante.
v est une suite définie sur $\mathbb{N}$, à termes strictement positifs et croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n - \dfrac{1}{2\,v_n}$

Que peut-on dire de la suite w ?

u est croissante, donc pour tout entier n , on a : $u_n \leq u_{n+1}$
v est croissante, donc pour tout entier n , on a :

$$v_n \leq v_{n+1} \Leftrightarrow 2\,v_n \leq 2\,v_{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\,v_n} \geq \frac{1}{2\,v_{n+1}} \text{ (car pour tout } n \in \mathbb{N}\text{ , } v_n > 0 \text{)}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2\,v_n} \leq -\frac{1}{2\,v_{n+1}}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n - \frac{1}{2\,v_n} \leq u_{n+1} - \frac{1}{2\,v_{n+1}} \Leftrightarrow w_n \leq w_{n+1}$$

ainsi la suite w est croissante.

Ex 2 :

Calculer les sommes ci-dessous :

a) $S = 5 + \dfrac{17}{3} + \dfrac{19}{3} + 7 + \ldots + \dfrac{187}{3} + 63$

Soit la suite (u_n) définie pau $u_n = 5 + \dfrac{2}{3}\,n$; (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\dfrac{2}{3}$

On a $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_p$

et $u_p = 63 \Leftrightarrow 5 + \dfrac{2}{3}\,p = 63 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\,p = 58 \Leftrightarrow p = 87$

Ainsi $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{87} = 88 \times \dfrac{u_0 + u_{87}}{2} = 44 \times (5 + 63) = 44 \times 68 = 2992$

b) $S' = \dfrac{1}{8} + \dfrac{\sqrt{2}}{8} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \ldots + 16 + 16\sqrt{2}$

Soit la suite (v_n) définie pau $v_n = \dfrac{1}{8}(\sqrt{2})^n$; (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{8}$ et de raison $\sqrt{2}$

On a $S' = v_0 + v_1 + \ldots + v_p$

et $v_p = 16\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{8}(\sqrt{2})^p = 16\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{p-1} = 128$

On a $(\sqrt{2})^{14} = 128$

Donc p = 15

Ainsi $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{15} = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1-(\sqrt{2})^{16}}{1-\sqrt{2}} = \ldots = \dfrac{255}{8}(1+\sqrt{2})$

Ex 3 :

u est la suite définie par $u_0 = 0$ est la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ pour tout entier n.

v est la suite définie pour tout entier n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

a) Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison .
b) Exprimer v_n en fonction de n .
c) En déduire u_n en fonction de n .

a)
Pour tout entier n , on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{u_n - 1}{5\,u_n + 15}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{u_n - 1}{5\,u_n + 15}}{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}} = \ldots = \frac{1}{5}$$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\dfrac{1}{3}$

b) Pour tout entier n , on a :

$$v_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

c) Pour tout entier n , on a :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \Leftrightarrow v_n \times u_n + 3 \times v_n = u_n - 1$$
$$\Leftrightarrow v_n \times u_n - u_n = -1 - 3\,v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n \times (v_n - 1) = -1 - 3\,v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - 3\,v_n}{v_n - 1}$$

En remplaçant par $v_n = -\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, on obtient :

$$u_n = -3\,\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n + 3} = -3 \times \frac{1 - 5^n}{1 + 3 \times 5^n} = 3 \times \frac{5^n - 1}{1 + 3 \times 5^n}$$