EXERCICES SUR LES SUITES

EXERCICE 1

Une personne loue un appartement à partir du 1er janvier 2001.
Elle a le choix entre deux formules de contrat.
Dans les deux cas le loyer annuel initial est 4800 € et le locataire a l'intention d'occuper l'appartement pendant neuf années complètes.

1°) **CONTRAT N°1**

Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5 % du loyer de l'année précédente.

a) Calculer le loyer annuel u_2 payé lors de la 2ième année

b) Exprimer u_n (loyer annuel payé lors de la nième année) en fonction de n.
En déduire la valeur de u_9

c) Exprimer en fonction de n la somme payée à l'issue de n années de location
En déduire la somme payée à l'issue de 9 années de location

2°) **CONTRAT N°2**

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 300 € du loyer de l'année précédente.

a) Calculer le loyer annuel v_2 payé lors de la 2ième année

b) Exprimer v_n (loyer annuel payé lors de la nième année) en fonction de n.
En déduire la valeur de v_9

c) Exprimer en fonction de n la somme payée à l'issue de n années de location
En déduire la somme payée à l'issue de 9 années de location

3°) Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $3\,u_{n+1} = u_n + 4$

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 2$

3°) Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

4°) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n - 2$
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

6°) Soit $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$
Déterminer l'expression de S_n , puis l'expression de T_n en fonction de n.

7°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

EXERCICES SUR LES SUITES

CORRECTION

EXERCICE 1

1°) a) Le loyer annuel est de 4800 € la première année.
Puisqu'il subit une augmentation annuelle de 5 %, le loyer annuel u_2 payé lors de la $2^{\text{ième}}$ année sera
$u_2 = 4800 + 4800 \times 5\ \% = 4800 + 4800 \times \frac{5}{100} = 4800\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 4800 \times 1{,}05$ donc $\boxed{u_2 = 5040}$.

b) Chaque année le loyer annuel subit une augmentation de 5 %, c'est-à-dire qu'il est multiplié par 1,05 .
On a donc pour tout $n \geqslant 1$: $u_{n+1} = u_n \times 1{,}05$.
La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $u_1 = 4800$.
On sait alors que pour tout $n \geqslant 1$ $u_n = u_1 \times (1{,}05)^{n-1}$.
Donc $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1 : u_n = 4800 \times (1{,}05)^{n-1}}$
On a en particulier $u_9 = 4800 \times (1{,}05)^8$ donc $u_9 \approx 7091{,}79$.

c) La somme payée à l'issue de n années de location est égale à la somme des loyers annuels des n années, c'est-à-dire $u_1 + u_2 + ... + u_n$
La suite (u_n) étant géométrique de raison 1,05 on sait que :
$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \times \frac{1 - (1{,}05)^n}{1 - 1{,}05}$ donc $\boxed{u_1 + u_2 + ... + u_n = 4800 \times \frac{1 - (1{,}05)^n}{1 - 1{,}05} \text{ pour tout } n \geqslant 1}$
On obtient $u_1 + u_2 + ... + u_9 \approx 52\,927{,}51$.

2°) a) Le loyer annuel est de 4800 € la première année.
Puisqu'il subit une augmentation forfaitaire de 300 €, le loyer annuel v_2 payé lors de la $2^{\text{ième}}$ année sera
$v_2 = 4800 + 300$ donc $\boxed{v_2 = 5100}$.

b) Chaque année le loyer annuel subit une augmentation forfaitaire de 300 € .
On a donc pour tout $n \geqslant 1$: $v_{n+1} = v_n + 300$.
La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison 300 et de premier terme $v_1 = 4800$.
On sait alors que pour tout $n \geqslant 1$ $v_n = v_1 + (n - 1) \times 300$.
Donc $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1 : v_n = 4\,800 + (n - 1) \times 300}$.
On a en particulier $v_9 = 4800 + 8 \times 300$ donc $\boxed{v_9 = 7200}$.

EXERCICE 2

(u_n) est définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $3\,u_{n+1} = u_n + 4$

1°) On a $3\,u_1 = u_0 + 4$ donc $3\,u_1 = 5 + 4 = 9$ donc $\boxed{u_1 = 3}$

et $3\,u_2 = u_1 + 4 = 3 + 4 = 7$ donc $\boxed{u_2 = \frac{7}{3}}$

2°) On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : $u_n \geqslant 2$
On a $u_0 = 5$ donc $u_0 \geqslant 2$, donc P_0 est vraie.
Supposons que P_k est vraie pour un entier $k \geqslant 0$.
On a alors $u_k \geqslant 2$ donc $u_k + 4 \geqslant 6$ donc $3\,u_{k+1} \geqslant 6$ donc $u_{k+1} \geqslant 2$
(on peut diviser par 3 car 3 > 0)
c'est-à-dire que P_{k+1} est vraie.
On a donc démontré par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Conclusion : P_n est héréditaire, et est vraie au rang 0 donc $u_n \geqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3°) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $3\,u_{n+1} = u_n + 4$, donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{3}$

Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 4}{3} - u_n = \dfrac{u_n + 4 - 3u_n}{3} = \dfrac{-2u_n + 4}{3}$

On a vu dans la question précédente que $u_n \geqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $2\,u_n \geqslant 4$, donc $0 \geqslant -2\,u_n + 4$

On en déduit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$

REMARQUE : on peut aussi démontrer que (u_n) est décroissante en démontrant par récurrence que $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4°) (u_n) est une suite décroissante et minorée par 2, donc $\boxed{(u_n) \text{ est une suite convergente}}$.

Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ on a aussi $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$

Sachant que $3\,u_{n+1} = u_n + 4$, on a $3 \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 4$ donc $3\,l = l + 4$, c'est-à-dire $2\,l = 4$

donc $l = 2$ c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n - 2$

donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n + 4}{3} - 2 = \dfrac{u_n + 4 - 6}{3} = \dfrac{u_n - 2}{3} = \dfrac{v_n}{3}$

On a donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{3} v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } \frac{1}{3}}$.

(v_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Avec $v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$, on a donc $v_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6°) $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

S_n est donc la somme des n+1 premiers termes de la suite géométrique (v_n)

On sait alors que $S_n = v_0 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$ donc $S_n = 3 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$

On obtient alors $S_n = \dfrac{9}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \ldots + (v_n + 2) = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + 2(n + 1)$

Donc $T_n = S_n + 2(n + 1)$ donc $\boxed{T_n = \frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + 2(n + 1) \text{ pour tout } n \text{ Î } \mathbb{N}}$.

7°) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ parce que $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{3^{n+1}} = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{9}{2}}$

D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n + 1) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty}$