DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

Avant-propos :

L'arithmétique n'est, à proprement parler que l'étude des nombres entiers. A première vue, cela semble très restreint, mais les mathématiciens ont développé sur le sujet une histoire qui s'étend sur plus de deux millénaires. Les plus grands mathématiciens se sont penchés sur la question : Pythagore, Euclide, Fermat, Euler, Lagrange, Gauss, Hilbert… Pourquoi un tel attrait sur le sujet ? La simplicité des problèmes posés, et la complexité des démonstrations. Ces nombres entiers sont partout présents dans notre entourage : pour compter, pour dénombrer, coder, les numéros de téléphone ou de sécurité sociale… Ces nombres entiers fournissent aussi une première idée de la notion d'infini.

I) PROPRIETES SUR $\mathbb{N}$ ET $\mathbb{Z}$

DEFINITION

- L'ensemble des entiers $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \dots\}$ est appelé ensemble des entiers naturels et noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des entiers $\{\dots \dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \dots\}$ est appelé ensemble des entiers relatifs et noté $\mathbb{Z}$.

REMARQUE

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

THEOREME

- **Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.**
- **Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.**

EXEMPLES

- Soit $A = \{5 ; 2 ; 8 ; 15 ; 68\}$. A est une partie de $\mathbb{N}$. Son plus petit élément est …….
- Soit B l'ensemble des nombres impairs. B est une partie de $\mathbb{N}$. Son plus petit élément est …….

REMARQUE

Une partie non vide de $\mathbb{Z}$ n'admet pas nécessairement de plus petit élément.

II) MULTIPLES ET DIVISEURS DANS $\mathbb{Z}$

DEFINITION

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que $\boldsymbol{a}$ ***divise*** $\boldsymbol{b}$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $a\,k = b$. On note $\boldsymbol{a \mid b}$.

On a donc : $\forall(\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}) \in \mathbb{Z}^2, (\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \,/\, \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b}$.

On dit aussi que a est un diviseur de b ; b est un multiple de a ; b est divisible par a.

EXEMPLES

- De l'égalité $4 \times 9 = 36$ on peut déduire que :
  - ⟶ 36 est un multiple de 4 ; de 9.
  - ⟶ 4 est un diviseur de 36.
  - ⟶ 9 divise 36.

● L'ensemble des multiples de 3 est l'ensemble des nombres s'écrivant $3 \times k \quad avec \quad k \in \mathbb{Z}$. On le note ... ...

● D'une manière générale, les multiples d'un entier a sont : $... - 3\,a\,;\ -2\,a\,;\ -a\,; 0\,; a\,; 2\,a\,; 3\,a\,; ...$

On note ... ... **l'ensemble des multiples de a.**

PROPRIETES

1) 0 est multiple de tout entier.

2) –1 et 1 divisent tout entier.

3) $a \mid a$ pour tout entier relatif a.

4) Si $a \mid b$ et si $a \neq 0$ alors : $|a| \leq |b|$.

5) Si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a = b$ ou $a = -b$ avec a et b non nuls.

6) Pour tout entier relatif a, a et $-a$ ont les mêmes diviseurs.

7) $a \mid b \Leftrightarrow \forall\, c \in \mathbb{Z}, a \mid bc$.

8) Transitivité de la relation de divisibilité : **Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$.**

9) Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid (b + c)$ et $a \mid (b - c)$

et d'une manière générale $a \mid (b\,u + c\,v)\ avec\ (u\,; v) \in \mathbb{Z}^2$

Démonstrations

5) 7) 8) 9)

Remarque

On peut montrer par récurrence que si un entier a divise plusieurs entiers a_1 ; ...; a_n alors il divise aussi tout entier de la forme $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$ où u_1 ... u_n sont des entiers donnés.

EXERCICES D'APPLICATION

1) Déterminer tous les couples d'entiers naturels tels que : $x^2 - 2\,x\,y = 15$.
2) Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $(n - 3)$ divise $(n + 5)$.
3) k étant un entier naturel, on pose $a = 9\,k + 2$ et $b = 12\,k + 1$. Quels peuvent être les diviseurs communs à a et b ?

III) DIVISION EUCLIDIENNE

THEOREME

Soit b un entier naturel non nul. Alors, pour tout entier relatif a, il existe ***un unique entier*** (relatif) $\boldsymbol{q}$ et ***un unique entier*** $\boldsymbol{r}$ tels que $\boldsymbol{a = b\,q + r \quad et \quad 0 \leq r < b}$.

DEMONSTRATION

Existence

● Si $0 \leq a < b$, on prend alors $q = 0$ et $r = a$.

● Si $a \geq b$, alors a et b sont deux entiers naturels strictement positifs. Soit alors $E = \{n \in \mathbb{N}, n\,b \leq a\}$.

E est une partie de $\mathbb{N}$ non vide $\{1 \in E\}$, majoré (a est un majorant), donc E admet un plus grand élément. On le note q.

Soit alors $r = a - b\,q$. $q \in E$ donc $b\,q \leq a$ donc $r \geq 0$. *De plus,* a, b *et* q *sont des entiers, donc* r *est un entier.*

q est le plus grand élément de E. Donc $q + 1 \notin E$. Par suite, $a < (q+1)\,b$, c'est-à-dire $q\,b + r \leq a < q\,b + b$, donc $r < b$. On a donc $a = b\,q + r$ avec $0 \leq r < b$, q *et* r étant des entiers.

● Si $a < 0$, il existe alors un couple $(q\,;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $-a = b\,q + r$ et $0 \leq r < b$. Si $r = 0$, on a alors $a = -q\,b$ et si $r \neq 0$, on a alors $a = (-q-1)\,b + b - r$, avec $0 \leq b - r < b$.

Unicité

Supposons qu'il existe deux couples $(q\,;r)$ et $(q';r')$ répondant au problème posé.

On a $b\,q + r = b\,q' + r'$ donc $b(q - q') = r' - r$ donc b divise $r' - r$.

De plus, $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$, donc $-b < r' - r < b$. Le seul multiple de b compris strictement entre $-b$ et b étant 0, on en déduit que $r = r'$, b étant non nul, on a alors $q = q'$.

Remarque : le théorème reste vrai si b est un entier négatif.

DEFINITION

> ***Déterminer q et r s'appelle faire la division euclidienne de a par b.***
>
> ***a s'appelle le dividende.*** ***b est le diviseur.***
>
> ***q est le quotient.*** ***r est le reste.***

THÉORÈME

> 1) $\boldsymbol{b \mid a}$ **équivaut à** $\boldsymbol{r = 0}$
> 2) **Il n'y a que b restes possibles dans la division euclidienne de a par b.**

DÉMONSTRATION

1) ● Si $r = 0$ alors $a = b\,q$ donc $b \mid a$.

● Si $b \mid a$ alors il existe un entier q tel que $a = b\,q$. D'après l'unicité de la division euclidienne, on en conclut que le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

2) On a $0 \leq r < b$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$, donc r ne peut prendre que b valeurs distinctes.

EXERCICES D'APPLICATION

1) Trouver tous les entiers qui divisés par 5 donne un quotient égal à 3 fois le reste.
2) Lorsqu'on divise a par b, le reste est 8 et lorsqu'on divise 2 a par b, le reste est 5. Déterminer le diviseur b.