# DS DE MATHEMATIQUES DE Term S

***Calculatrice autorisée – durée : 3 h***

**24 / 09 / 2014**

## EXERCICE 1

***Démontrer par récurrence les propriétés suivantes*** :

**1)** Pour tout $n \in \mathbb{N}, 6^n - 1$ est un multiple de 5.

**2)** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n^2 - 3\,n + 5}{n + 3}$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geq n - 6$.

**3)** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 8 \qquad et \qquad u_{n+1} = \frac{2}{5}\,u_n + 3$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = 3\,\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$$

**4)** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 3 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 2$.

**5)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$1^2 + 2^2 + \ \dots\dots\dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2\,n+1)}{6}$$

## EXERCICE 2

Etudier la limite des suites suivantes :

$$\boldsymbol{u_n} = 4\,n^2 - 3\,n + \frac{1}{n^2}$$

$$\boldsymbol{v_n} = \frac{2\,n^2 - 5\,n + 3}{n + 4}$$

$$\boldsymbol{w_n} = n^2 - 4\,\sqrt{n} + 1$$

$$\boldsymbol{t_n} = \frac{n + 4}{-n^2 + 2}$$

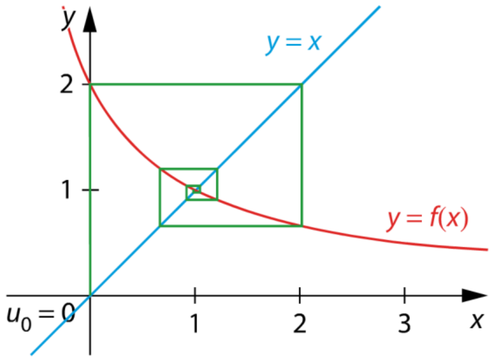
$$\boldsymbol{z_n} = \frac{n^2 - 3\,n + 7}{4\,n^2 + 3\,n - 11}$$

## EXERCICE 3

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2}{u_n + 1}$$

La suite $(u_n)$ est représentée ci-contre :




1) Conjecturer graphiquement un minorant $m$ et un majorant $M$ entiers de $(u_n)$.

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $m \leq u_n \leq M$.

## EXERCICE 4

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et pour tout entier $n$, on a $u_{n+1} = u_n + 2\,n + 1$.

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$ puis conjecturer l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

2) Démontrer par récurrence la conjecture émise à la question 1).

## EXERCICE 5

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

La suite $(v_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{1}{u_n} + 1$$

1) A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement à l'infini de la suite $(u_n)$.

2) Prouver que la suite $(v_n)$ est **arithmétique.**

3) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

4) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**HUMOUR**

**Quel nombre ne dort jamais ?**

*Réponse : 8 car une fois couché il est beaucoup trop grand !!!*

***Trop drôle, non ??? Bon courage…***