DS DE MATHEMATIQUES DE TERMINALE S

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. **19/11/2014**

EXERCICE 1 **7 pts**

f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{2 + \cos x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que la fonction f est paire et déterminer sa période.

3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi\,;\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi\,;3\,\pi]$.

EXERCICE 2 **7 pts**

f et g sont les fonctions définies sur $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}\,(x-1)^2$$

1) Tracer dans une même fenêtre de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g.
Qu'observe-t-on pour les grandes valeurs de x ?

2) **a)** Démontrer que pour tout $x > -2$: $\quad g(x) - f(x) = \frac{4}{x+2}$.

b) En déduire la limite de $g(x) - f(x)$ en $+\infty$.

c) Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g.

3) On considère l'algorithme ci-dessous :

Entrée et initialisation
Saisir a un nombre positif proche de 0
x prend la valeur -1
Traitement
Tant que $\dfrac{4}{x+2} > a$
x prend la valeur $x + 1$
FinTantque
Sortie
Afficher x

a) Expliquer le rôle de cet algorithme.

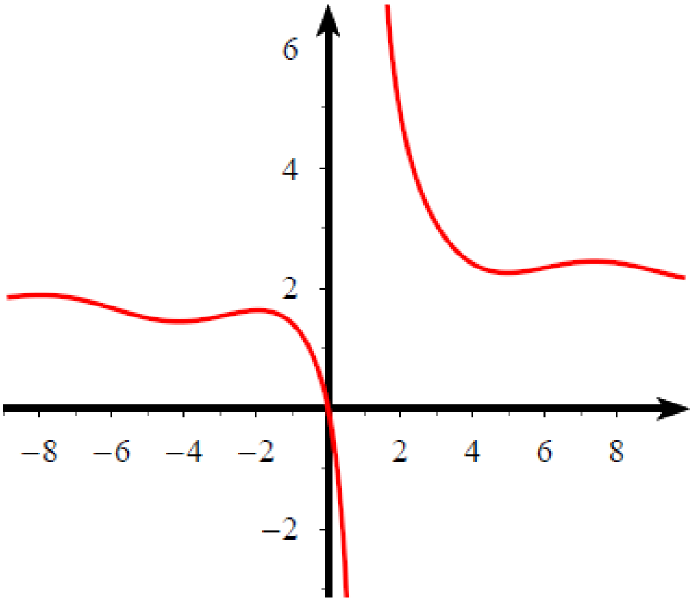
b) Quelle valeur de x l'algorithme affiche-t-il lorsqu'on saisit $a = 0{,}01$?

EXERCICE 3   **6 pts**

f est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x - 1}.$$

1) On a représenté ci-dessous la fonction f. Conjecturer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$ et les limites à gauche et à droite de 1.



2) Démontrer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ à l'aide d'un encadrement.

3) Déterminer les limites à gauche et à droite de 1.

4) Interpréter graphiquement les limites obtenues.

EXERCICE 4   **12 pts**

1) Soit l'équation (E) : $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$.

On pose la fonction u définie par $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

a) Etudier les variations de la fonction u.

b) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

c) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.

d) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

2)

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

Calculer $f'(x)$ puis exploiter les résultats du **1)** pour dresser le tableau de variation de f et on montrera que :

$$f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$$

b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice les positions des courbes $\mathscr{C}g$ et $\mathscr{C}h$ représentatives des fonctions suivantes définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = x(x-1) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Démontrer alors cette conjecture en vous aidant d'un tableau de signes en utilisant les résultats du **1)**.

EXERCICE 5 **8 pts**

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{3}\,u_n + \frac{1}{3}\,n + 1.$$

1) **a)** Calculer u_1 et u_2. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) **a)** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leq n + 3.$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

c) Déduire des questions précédentes le sens de variation de la suite (u_n).

3) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - n.$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

BRUCE LEE DISAIT « NE CRAINS PAS L'ECHEC. CE N'EST PAS L'ECHEC, MAIS LE MANQUE D'AMBITION QUI EST UN CRIME. AVEC DES OBJECTIFS ELEVES, L'ECHEC PEUT ETRE GLORIEUX. »

MEDITER DESSUS, MAIS APRES LE DS BIEN SUR… BON COURAGE…

POUR LES ÉLÈVES SUIVANT LA SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES : durée 1 h

EXERCICE 1 — 5 pts

Dans chacun des cas suivants, écrire sur votre copie, la lettre correspondant à <u>l'unique bonne réponse</u> :

1 $37 = 3 \times 10 + 7$, donc :	**a.** le reste de la division euclidienne de 37 par 10 est 7	**b.** le reste de la division euclidienne de 37 par 3 est 7	**c.** $37 \equiv 3(7)$
2 $37 = 3 \times 10 + 7$, donc :	**a.** -7 est le reste de la division euclidienne de -37 par 10	**b.** -7 est le reste de la division euclidienne de -37 par -10	**c.** 3 est le reste de la division euclidienne de -37 par 10
3 Si $a \equiv -5(7)$, alors :	**a.** $a \equiv 5(7)$	**b.** $a \equiv 2(7)$	**c.** $a - 5$ est un multiple de 7
4 Si a, b et n sont des entiers tels que $a \equiv b(n)$, alors :	**a.** b est le reste de la division euclidienne de a par n	**b.** a et b ont le même signe	**c.** $b - a$ est un multiple de n
5 Pour tout entier naturel n :	**a.** $19^n - 1$ est un multiple de 3	**b.** $19^n - 1$ est un multiple de 5	**c.** $19^n - 1$ est divisible par 4

EXERCICE 2 — 5 pts

On veut déterminer les entiers relatifs $n \neq -2$ tels que $\dfrac{2n-29}{n+2}$ soit un entier.

1) Montrer que si n est solution alors $n+2$ divise 33.
2) Établir la liste des diviseurs de 33 dans $\mathbb{Z}$. En déduire les valeurs possibles de n.
3) Conclure en testant les valeurs trouvées au 2).

EXERCICE 3 — 3 pts

Le nombre $A = 1305^{1305} + 900^{900}$ est-il divisible par 29 ?

EXERCICE 4 — 2 pts

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Calculer le reste de la division euclidienne de 27^{2012} par 7.

<u>N.B</u> : On pourra utiliser la propriété : $(n-1) \equiv -1 \ (n)$.

EXERCICE 5 — 5 pts

a) Quel est le reste de la division euclidienne de 1000 par 37 ?
b) En déduire que pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 37 est égal à 1.
c) En déduire que le nombre $N = 10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ est divisible par 37.