DS DE MATHEMATIQUES DE Term S

SPECIALITE **Le 28 Janvier 2015**

EXERCICE 1 **6 pts**

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1)

- **a)** On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,+\infty[$.
- **b)** Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
- **c)** Montrer que pour tout x strictement positif, on a
$$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$
- **d)** En déduire la limite de f en $+\infty$. On complètera le tableau de variations de f.

2)

- **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On notera α cette solution.
- **b)** Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\,;15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- **c)** En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \neq 0, \quad u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3) \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En ***Annexe***, on a tracé dans un repère orthonormé, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1)

- **a)** Construire sur l'axe des abscisses de l'***Annexe***, les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n), en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
- **b)** Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2)

- **a)** Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
- **b)** Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la **partie A question 2) a).**
- **c)** Démontrer par ***récurrence***, en utilisant l'égalité $u_{n+1} = g(u_n)$, que pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.
- **d)** En utilisant ***la différence*** $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$, démontrer la conjecture émise à la **question 1) b) de la partie B**.
- **e)** Déduire des ***questions précédentes*** que la suite (u_n) converge.

On admettra que la suite (u_n) a pour limite α.

3) On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u − 14,2 < 0
        u prend la valeur de 5 ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

a) ***Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.***
Justifier que cet algorithme se termine.

b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (**on arrondira à 5 décimales**).

EXERCICE 2 — 5 pts

1) On considère l'équation (E): $17x - 6y = 2$, où x et y sont des entiers.

a) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $17x = 6y$.

b) Montrer que le couple $(-1\,;\,-3)$ est une solution particulière de l'équation $17x - 6y = 1$, en déduire une solution particulière de (E).

c) En déduire tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ solution de (E).

d) Montrer que le PGCD des couples solutions de (E) est 1 ou 2.

e) Déterminer les couples $(x; y)$ solution de (E) dont le PGCD est 2.

f) Déterminer le couple $(x_0\,;\,y_0)$ solution de (E) tel que :

$$PGCD(x_0\,;\,y_0) = 2 \qquad \text{et} \qquad 100 \leq y_0 \leq 150.$$

2) *Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composée de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager équitablement et de laisser le reste à leur cuisinier chinois, qui recevrait alors 3 pièces d'or. Mais leur bateau fit naufrage, et ne furent sauvés que 6 pirates, le cuisinier et le butin. Le partage laisserait alors 5 pièces d'or au cuisinier.*

a) On note N le nombre de pièces d'or du butin, x le nombre de pièces qu'aurait reçu chaque pirate avant le naufrage, y le nombre de pièces reçues par chaque pirate après le naufrage. Exprimer N en fonction de x, puis en fonction de y.

b) Écrire alors la relation liant x et y.

c) En utilisant les résultats de la question **1)**, déterminer la fortune minimale que pourra espérer le cuisinier quand il décidera d'empoisonner le reste des pirates avec du civet de rat frelaté.

EXERCICE 3 — 4 pts

1ère Partie On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - x$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Calculer $f(0)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\sin x \leq x$.

<u>2ème Partie</u> On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

1) Calculer $g'(x)$. Est-il possible de déterminer le signe de $g'(x)$?

2) On note g'' la dérivée de la fonction g', appelée dérivée seconde de g.

a) Calculer $g''(x)$. Quel est le signe de $g''(x)$?

b) Dresser alors le tableau de variations de g'.

c) Quel est le signe de $g'(x)$? En déduire le tableau de variations de g.

d) Calculer $g(0)$, puis dresser le tableau de signe de $g(x)$.

3) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x.$$

EXERCICE 4 — PAS SI COMPLEXE !!! — 5 pts

1) Donner la ***forme algébrique*** de

$$z = \frac{5-4i}{3-2i}.$$

2) On pose

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calculer j^2, j^3 et en déduire j^{253}.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = -1\,;\ z_B = 2 + i\sqrt{3}\ \text{ et }\ z_C = 2 - i\sqrt{3}.$$

a) Réaliser une figure et placer les points A, B et C (sur la feuille ***Annexe***).

b) Calculer les distances AB, BC et AC.

c) En déduire la ***nature précise*** du triangle ABC.

4) Pour tout $z \neq 2i$, on considère le nombre complexe z' tel que :

$$\boldsymbol{z' = \frac{z-1}{z-2i}}.$$

a) Donner la ***forme algébrique*** de z' lorsque $z = 2 + i$ puis lorsque $z = 3i$.

b) Peut-on avoir $z' = i$? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de z (***on donnera leur(s) forme(s) algébrique(s)***) ?

c) En posant $z = x + yi$, avec x et y réels, ***exprimer*** la partie réelle de z' et sa partie imaginaire ***en fonction de x et y***.

5) Montrer que le nombre

$$Z = \frac{z-2}{\overline{z}+3i} + \frac{\overline{z}-2}{z-3i}$$

est ***un nombre réel*** quel que soit le nombre complexe z distinct de $3i$ ou $-3i$.

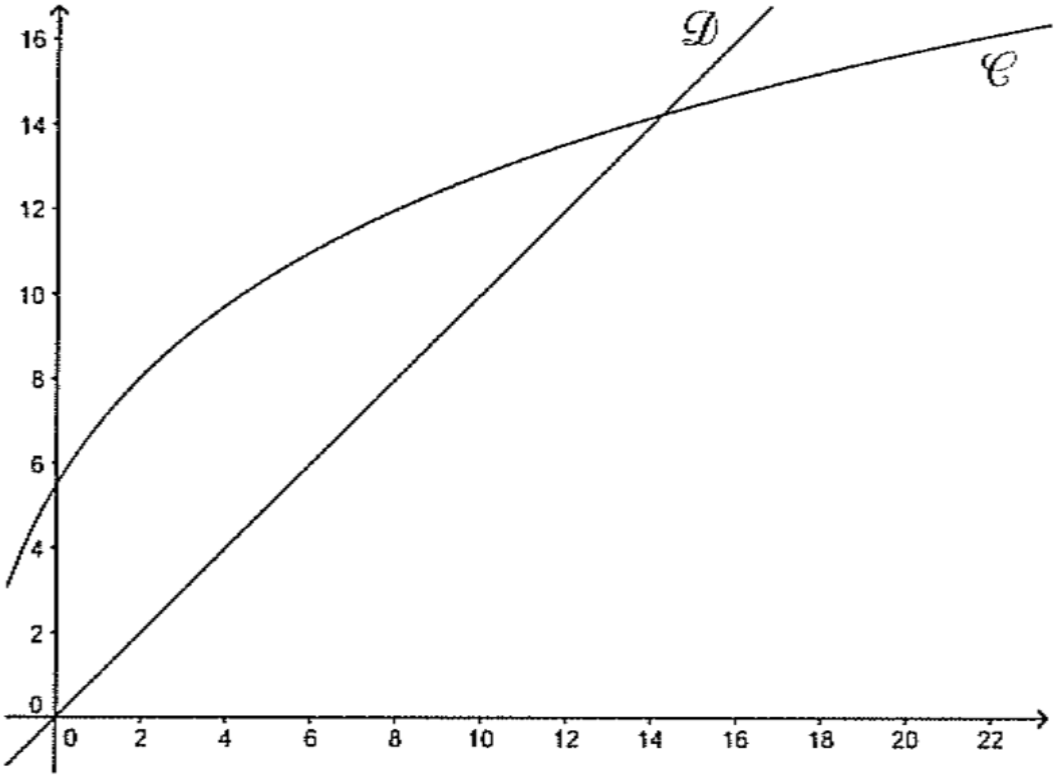
FEUILLE ANNEXE

NOM :

Prénom :

Term S

EXERCICE 1



EXERCICE 4