DS DE MATHEMATIQUES DE Term S

OBLIGATOIRE

Le 28 Janvier 2015

EXERCICE 1

6 pts

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1)

- **a)** On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.
- **b)** Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
- **c)** Montrer que pour tout x strictement positif, on a
$$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$
- **d)** En déduire la limite de f en $+\infty$. On complètera le tableau de variations de f.

2)

- **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.
- **b)** Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\ ; 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- **c)** En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \neq 0, \quad u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3) \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En ***Annexe***, on a tracé dans un repère orthonormé, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1)

- **a)** Construire sur l'axe des abscisses de l'***Annexe***, les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n), en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
- **b)** Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2)

- **a)** Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
- **b)** Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la **partie A question 2) a).**
- **c)** Démontrer par ***récurrence***, en utilisant l'égalité $u_{n+1} = g(u_n)$, que pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.
- **d)** En utilisant ***la différence*** $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$, démontrer la conjecture émise à la **question 1) b) de la partie B**.
- **e)** Déduire des ***questions précédentes*** que la suite (u_n) converge.

On admettra que la suite (u_n) a pour limite α.

3) On considère l'algorithme suivant :

u prend la valeur 4
Répéter Tant que $u - 14{,}2 < 0$
$\quad$ u prend la valeur de $5\ln(u+3)$
Fin du Tant que
Afficher u

a) ***Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.***

Justifier que cet algorithme se termine.

b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (**on arrondira à 5 décimales**).

EXERCICE 2 **5 pts**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier } n, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1)

a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b) Vérifier que si n est l'un des entiers $0, 1, 2, 3, 4$ alors $u_n - 1$ a même signe que $(-1)^n$.

2) Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a) Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 **4 pts**

<u>1ère Partie</u> On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - x$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Calculer $f(0)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\sin x \leq x$.

<u>2^ème^ Partie</u> On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

1) Calculer $g'(x)$. Est-il possible de déterminer le signe de $g'(x)$?

2) On note g'' la dérivée de la fonction g', appelée dérivée seconde de g.

- **a)** Calculer $g''(x)$. Quel est le signe de $g''(x)$?
- **b)** Dresser alors le tableau de variations de g'.
- **c)** Quel est le signe de $g'(x)$? En déduire le tableau de variations de g.
- **d)** Calculer $g(0)$, puis dresser le tableau de signe de $g(x)$.

3) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x.$$

EXERCICE 4 — PAS SI COMPLEXE !!! — 5 pts

1) Donner la ***forme algébrique*** de

$$z = \frac{5-4i}{3-2i}.$$

2) On pose

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calculer j^2, j^3 et en déduire j^{253}.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = -1\,;\; z_B = 2 + i\sqrt{3} \;\text{ et }\; z_C = 2 - i\sqrt{3}.$$

- **a)** Réaliser une figure et placer les points A, B et C (sur la feuille ***Annexe***).
- **b)** Calculer les distances AB, BC et AC.
- **c)** En déduire la ***nature*** du triangle ABC.

4) Pour tout $z \neq 2i$, on considère le nombre complexe z' tel que :

$$\boldsymbol{z' = \frac{z-1}{z-2i}}.$$

- **a)** Donner la ***forme algébrique*** de z' lorsque $z = 2 + i$ puis lorsque $z = 3i$.
- **b)** Peut-on avoir $z' = i$? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de z (***on donnera leur(s) forme(s) algébrique(s)***) ?
- **c)** En posant $z = x + yi$, avec x et y réels, ***exprimer*** la partie réelle de z' et sa partie imaginaire ***en fonction de*** $\boldsymbol{x}$ ***et*** $\boldsymbol{y}$.

5) Montrer que le nombre

$$Z = \frac{z-2}{\overline{z}+3i} + \frac{\overline{z}-2}{z-3i}$$

est ***un nombre réel*** quel que soit le nombre complexe z distinct de $3i$ ou $-3i$.

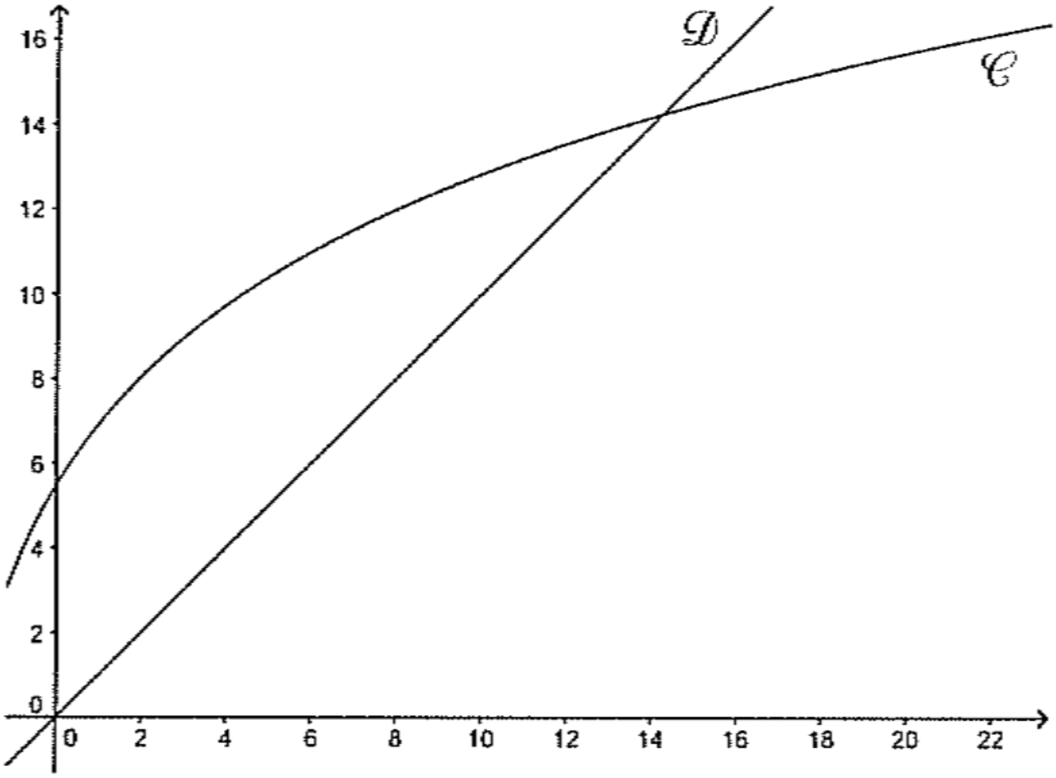
FEUILLE ANNEXE

NOM :

Prénom :

Term S

EXERCICE 1



EXERCICE 4