D.M n°1 DE MATHEMATIQUE : SPECIALITE.

A rendre pour le Mardi 4 Novembre 2014

EXERCICE 1 **4 pts**

On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $3\,x \equiv 5\ \ (7)$.

1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 7 ?

2) En déduire les restes possibles de la division de $3\,x$ par 7.

3) Montrer que l'ensemble des solutions est formé des entiers de la forme $7\,k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2 **4 pts**

On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 2 \equiv 0\ \ (9)$.

1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 9 ?

2) En déduire les restes possibles de la division de x^2 par 9.

3) Montrer que l'ensemble des solutions est formé des entiers de la forme $9\,k + 4$ ou $9\,k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 3 **6 pts**

1) **<u>ROC</u>** : On considère des entiers relatifs a et b et un entier naturel non nul n.

Démontrer que si $a \equiv b\ \ (n)$ alors pour tout entier naturel $p \geq 1$, $a^p \equiv b^p\ \ (n)$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq n \leq 6$, déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

Que peut-on en déduire pour les restes de la division euclidienne de 3^{n+6} et 3^n par 7 ?

4) A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 7.

EXERCICE 4 **2 pts**

On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 13$ et de raison $q = 5$.

Pour tout entier naturel n, déterminer le reste de la division euclidienne de v_n par 4.

EXERCICE 5 **4 pts**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 14$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5\,u_n - 6$.

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n\ \ (4)$.

2) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n : $2\,u_n = 5^{n+2} + 3$.

3) Déduire de la question précédente qu'aucun terme de cette suite n'est divisible par 3.

BONNES VACANCES ET BON COURAGE POUR CE PETIT CADEAU IMPREVU !!!!