LOIS DE PROBABILITÉ À DENSITÉ – LOI NORMALE

Lorsque l'on s'intéresse à la durée d'une communication téléphonique, à la durée de vie d'un composant électronique ou à la température de l'eau d'un lac, la variable aléatoire X associée au temps ou à la température, peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné. On dit alors que cette variable X est continue (qui s'oppose à discrète comme c'est le cas par exemple pour la loi binomiale). On ne peut plus parler de probabilité d'évènements car les évènements élémentaires sont en nombre infini. La probabilité d'une valeur isolée de X est alors nulle. On contourne cette difficulté en associant à la variable X un intervalle de $\mathbb{R}$ et en définissant une densité de probabilité.

I) LOIS A DENSITE

1) Densité de probabilité et espérance mathématique

DEFINITION

On appelle ***densité de probabilité*** d'une variable aléatoire continue X, toute fonction f *continue et positive* sur un intervalle $I = [a\,;b]$ $(éventuellement\ a\ peut\ être - \infty\ et\ b\ peut\ être + \infty)$ telle que :

- $\boldsymbol{p(X \in I) = \int_a^b f(t)dt = 1}$
- Pour tout intervalle $J = [\alpha\,;\beta]$ inclus dans I, on a : $\boldsymbol{p(X \in J) = \int_\alpha^\beta f(t)dt}$.

D'autre part, la fonction F définie par : $F(x) = p(X \le x)$ est appelée la ***fonction de répartition*** de la variable X

$$\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(t)dt}.$$

REMARQUE

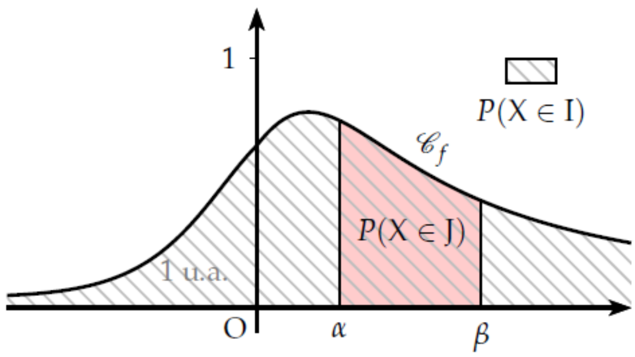
- Comme la fonction f est continue et positive, la probabilité $p(X \in I)$ correspond à l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$. Elle vaut alors 1 u.a.

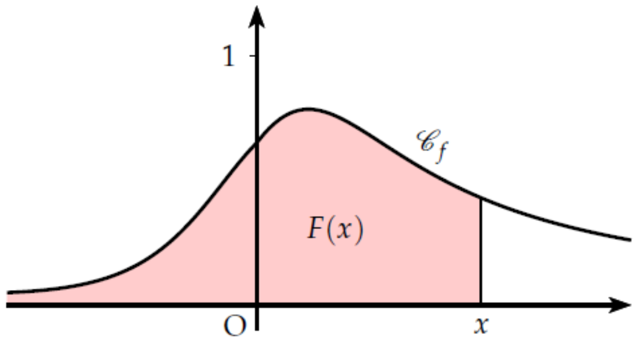
- La probabilité $p(X \in J)$, avec $J = [\alpha\,;\beta]$, correspond à l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \beta$.

- Comme la probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle, que l'intervalle J soit ouvert ou fermé importe peu. Ainsi :

$$\begin{aligned} p(X \in [\alpha\,;\beta]) &= p(X \in [\alpha\,;\beta[) \\ &= p(X \in]\alpha\,;\beta]) \\ &= p(X \in]\alpha\,;\beta[) \end{aligned}$$

- L'écriture $(X \in I)$ est une notation abusive car X n'est pas un nombre, mais la fonction qui associe une issue à un nombre. Elle prolonge la notation déjà utilisée pour des variables discrètes $(X = a)$.





$p(X \le x)$

DEFINITION

L'*espérance mathématique* d'une variable aléatoire continue X, de densité f sur I, est : $\boldsymbol{E(X) = \int_a^b tf(t)dt}$.

2) Loi uniforme

a) Définition

DEFINITION

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme dans l'intervalle $I = [a\,;b]$, avec $a \neq b$, lorsque la densité f est ***constante*** sur cet intervalle. On en déduit alors la fonction f :

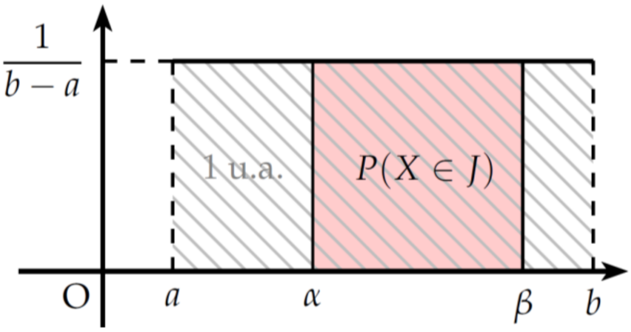
$$f(t) = \frac{1}{b-a}.$$

CONSEQUENCE

Pour tout intervalle $J = [\alpha\,;\beta]$ inclus dans I, on a alors :

$$p(X \in J) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{longueur\ de\ J}{longueur\ de\ I}$$

La probabilité est donc proportionnelle à la longueur de l'intervalle considéré.



EXEMPLE

On choisit un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0\,;5]$. On associe à X le nombre choisi.

Quelle est la probabilité que ce nombre soit supérieur à 4 ?

Quelle est la probabilité que ce nombre soit compris entre e et π ?

b) Espérance mathématique

THEOREME

Si X suit une *loi uniforme* sur un intervalle $I = [a\,;b]$, avec $a \neq b$, alors son *espérance mathématique* vaut :

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{a+b}{2}}.$$

Démonstration : D'après la définition de l'espérance, on a :

REMARQUE

Dans l'exemple précédent, on trouve : $E(X) =$, ce qui n'a rien de surprenant.

3) Loi exponentielle

a) Définition

DEFINITION

Une variable aléatoire X suit une ***loi exponentielle de paramètre réel*** $\lambda > 0$ lorsque sa densité est la fonction f définie sur $[\mathbf{0}\,;\ +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}}.$$

CONSEQUENCE : *on peut vérifier que*

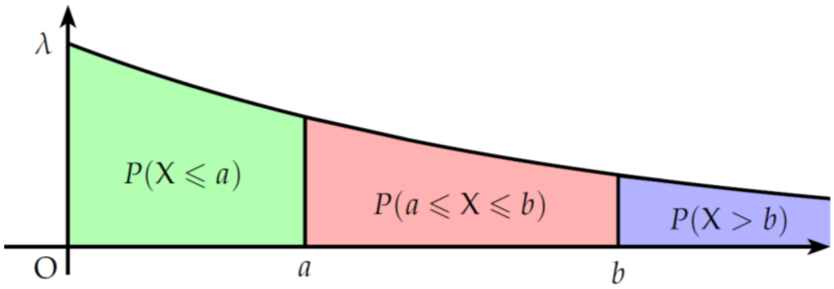
- La fonction de répartition F vaut : $\boldsymbol{F(x) = p(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}}$.

  En effet: $F(x) = p(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1.$

- f est bien une densité de probabilité, car la fonction f est positive et :

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - e^{-\lambda x}\right) = 1}$$

- On a : .... $\boldsymbol{p(X \leq a) = F(a) = 1 - e^{-\lambda a}}$.
- En passant par l'évènement contraire, on a : .... $\boldsymbol{p(X > a) = 1 - p(X \leq a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}}$.
- Et si X se trouve dans un intervalle $[a\,;b]$, on a : ...... $\boldsymbol{p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$.



b) Loi sans mémoire ou sans vieillissement

THEOREME

La loi exponentielle est une **LOI SANS MEMOIRE** *c'est-à-dire que :*

$$\forall \boldsymbol{t > 0 \ \ et \ \ h > 0} \qquad \boldsymbol{on\ a} \qquad \boldsymbol{p_{X\geq t}(X \geq t + h) = p(X \geq h)}$$

DEMONSTRATION **ROC**

On applique la formule des probabilités conditionnelles :

$$p_{X\geq t}(X \geq t + h) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \qquad = p(X \geq h)$$

REMARQUE : on dit que la durée de vie d'un appareil est sans mémoire ou sans vieillissement lorsque la probabilité que l'appareil fonctionne encore h années supplémentaires sachant qu'il fonctionne à l'instant t, **ne dépend pas de $\boldsymbol{t}$**.

On peut montrer que la loi exponentielle est la seule loi sans vieillissement (admis…)

Ceci est valable si l'appareil n'est pas sujet à un phénomène d'usure. On retrouve cette propriété en ce qui concerne la durée de vie d'un noyau radioactif.

c) Espérance mathématique

THEOREME

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors son ***espérance mathématique*** vaut :

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

DEMONSTRATION **ROC**

D'après la définition, en posant $g(t) =$, on a : $E(X) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)dt$

Il faut trouver une primitive de la fonction g, pour cela on dérive la fonction g :

$$g'(t) = \qquad = \qquad \Rightarrow \qquad g(t) =$$

On a alors :

$$\int_0^x g(t)dt = \qquad = \qquad =$$

$$\text{Donc} \quad \int_0^x g(t)dt =$$

On pose $Y =$, on a alors si $x \to +\infty$ alors $Y \to$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{Y\to-\infty} e^Y =$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} = \lim\limits_{Y\to-\infty} -Ye^Y =$

Par somme et par produit, on a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)dt =$

d) Un exemple

La durée de vie, en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée T qui suit une loi sans vieillissement de paramètre λ. Une étude statistique a montré que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

1) Calculer la valeur λ arrondie à trois décimales.

2) Quelle est la probabilité, arrondie à trois décimales, qu'un composant de ce type dure :

- **a.** Moins de 8 ans. **b.** Plus de 10 ans
- **c.** Au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de trois ans.

3) Quelle est l'espérance de vie de ce composant ?

REPONSE

1) Si T vérifie une loi sans vieillissement, T suit donc une loi exponentielle. Si la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675, on a donc :

$$p(T \leq 5) = \qquad = \qquad =$$

On a alors : $=$ $\Leftrightarrow$ $=$ donc $=$

On trouve alors : $\lambda = -\frac{\qquad}{\qquad} \approx$.

2) On a :

a.

b.

c.

3) $E(T) = \quad = \quad \approx$ soit à peu près

e) Un autre exemple : APPLICATION A LA PHYSIQUE

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire, c'est-à-dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « microscopique », dire quand un noyau va se désintégrer. Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement c'est-à-dire une loi exponentielle de paramètre λ. λ étant la constante radioactive (en s^{-1}) qui caractérise un radionucléide.

On appelle T la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité p qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant t est donc :

$$p = p(T \geq t) = e^{-\lambda t}$$

Si au départ on compte N_0 noyaux, au bout d'un temps t, on en comptera $N(t)$ qui vérifie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On appelle demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ le temps nécessaire pour que le nombre de radionucléides soit divisé par 2. On a alors :

$$= \quad \Leftrightarrow \quad = \quad \text{soit} \quad t_{\frac{1}{2}} = \frac{}{}$$

DEFINITION

Pour une variable aléatoire X qui suit *une loi de durée de vie sans vieillissement*, on appelle **demi-vie** la durée $t_{\frac{1}{2}}$ telle que :

$$\boldsymbol{p\left(X \geq t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}}$$

On obtient alors :
$$\boldsymbol{t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Enfin la durée de vie moyenne E d'un radionucléide est donnée par l'espérance mathématique :

$$E = \frac{}{} \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{}{} \quad \text{donc} \quad E = \frac{}{} \approx$$

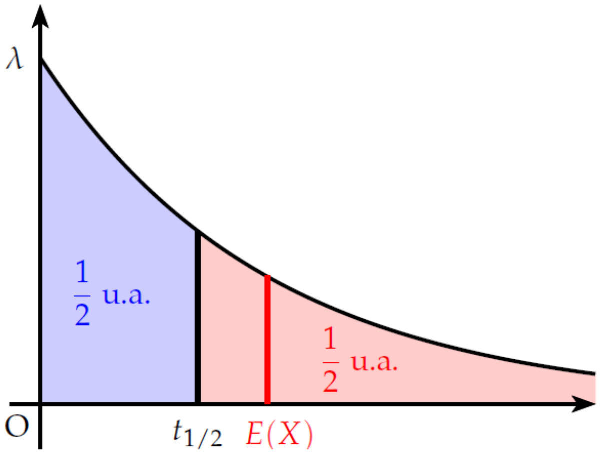
DEFINITION

Pour une variable aléatoire X qui suit *une loi de durée de vie sans vieillissement*, la durée de vie moyenne E est donnée par l'espérance mathématique :

$$\boldsymbol{E = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{\ln 2} \approx 1,44\, t_{\frac{1}{2}}}$$

REMARQUE

La demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ n'est pas égale à la durée de vie moyenne $E = E(X)$ car la courbe de densité de probabilité $\mathscr{C}_f$ n'est pas symétrique par rapport à la droite verticale d'abscisse $E(X)$.



f) Lien entre le discret et le continu

DISCRET	CONTINU
Univers Ω	**Intervalle I ou $\mathbb{R}$**
Évènement E **Sous-ensemble de Ω**	**Évènement J** **Sous-intervalle de I**
Probabilités p_i des évènements élémentaires : $\sum p_i = 1$	**Densité de probabilité** $\int_a^b f(t)dt = 1$
Équiprobabilité $p(E) = \dfrac{nbre\ de\ cas\ favorables}{nbre\ de\ cas\ possibles}$	**Loi uniforme** $p(X \in J) = \dfrac{longueur\ de\ J}{longueur\ de\ I}$

II) LA LOI NORMALE

Lorsqu'on étudie la loi binomiale sur un grand nombre d'expériences ($n > 50$ par exemple) à condition que la probabilité de succès sur une expérience ne soit pas trop petite ($p > 0{,}1$), on peut approximer cette loi binomiale par une loi normale dont la représentation est une courbe en cloche ou courbe de Gauss. On passe ainsi d'une distribution discrète à une distribution continue beaucoup plus souple.

Cette loi normale intervient dans de nombreuses distributions statistiques, lorsqu'un critère d'individu, par exemple la taille d'une femme adulte, dépend d'un grand nombre de facteurs ou paramètres. La répartition de la taille d'une femme adulte dans une population suit alors une loi normale (théorème central limite).

1) La loi normale centrée réduite

a) La densité de probabilité de Laplace-Gauss

DEFINITION

On appelle ***densité de probabilité de Laplace-Gauss***, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Remarque

Cette fonction φ correspond bien à une densité de probabilité :

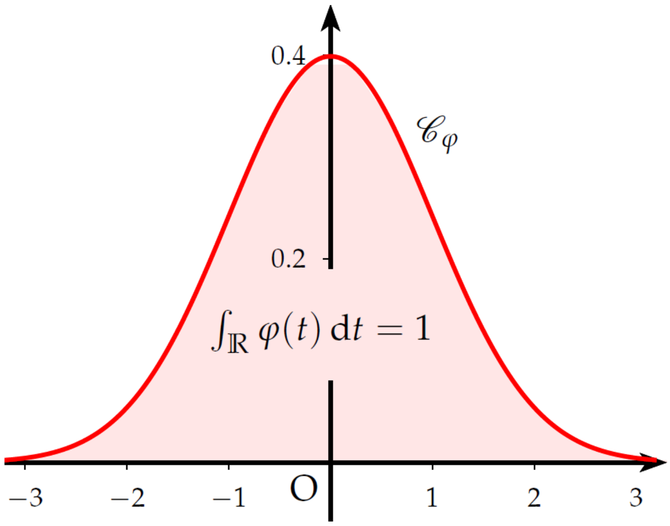
- φ est bien continue et positive sur $\mathbb{R}$ (*composée de fonctions continues et la fonction exponentielle est positive sur* $\mathbb{R}$) ;

- Cette fonction est paire et admet en 0 un maximum :

$$\boldsymbol{\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \approx 0,4}$$

- Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1. Sa démonstration est admise. Il faut cependant savoir qu'il n'existe pas de primitive s'exprimant avec des fonctions élémentaires pour cette fonction et que le calcul de l'aire sous la courbe demande des méthodes plus ou moins détournées tel un changement de variable.

- La courbe $\mathscr{C}\varphi$ est appelée **courbe en cloche** ou **courbe de Gauss**.



Comme la fonction φ est paire, on a alors :

$$\boldsymbol{\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \lim_{a \to +\infty} \int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}}$$

b) Loi Normale Centrée Réduite

Definition

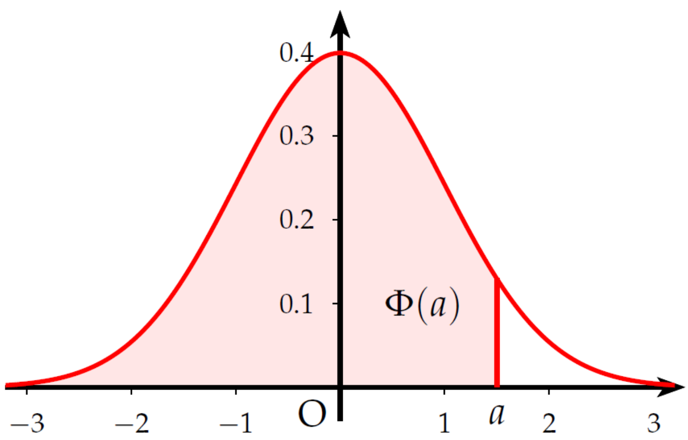
On dit que la variable aléatoire X suit une ***loi normale centrée réduite***, notée $\mathcal{N}(0\,;\,1)$ si sa *densité de probabilité* est égale à la fonction φ. Sa ***fonction de répartition*** Φ est donc définie par :

$$\boldsymbol{\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) dt.}$$

Remarque

- Le nombre $\Phi(a)$ représente l'aire du domaine délimité par cette courbe en cloche, l'axe des abscisses et la droite $x = a$.

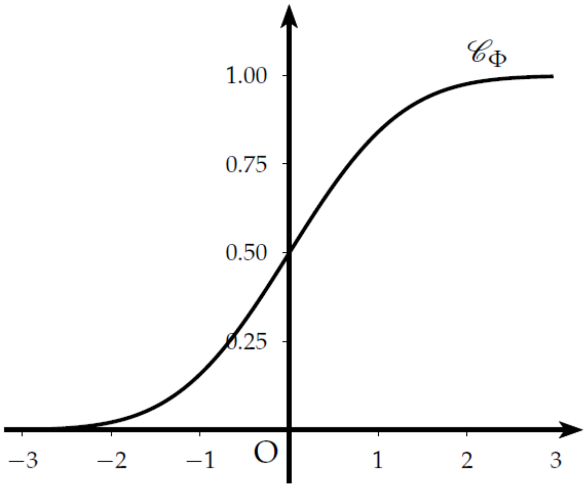
- La fonction Φ peut-être considérée comme la primitive de la fonction φ qui vérifie $\Phi(0) = 0{,}5$.



• Avant l'arrivée des calculatrices, on avait des tables (page 9) donnant les valeurs de $\Phi(a)$ pour les valeurs de a positives.

Avec la calculatrice TI, pour calculer $\Phi(1{,}24)$ on tape « distrib » puis on sélectionne « normalFRép(−1E99,1.24) ».

On trouve alors .



c) Calcul de probabilités

THEOREME

Si une variable aléatoire X suit une ***loi normale centrée réduite*** alors pour tous réels a et b tels que $a \leq b$, on a :

$$\boldsymbol{p(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)}$$

$$\boldsymbol{p(X \geq a) = 1 - \Phi(a)}$$

$$\boldsymbol{p(X \leq -|a|) = 1 - \Phi(|a|)}$$

DEMONSTRATION

• la première égalité est liée à la relation de Chasles pour l'intégrale (soustraction des aires sous la courbe).

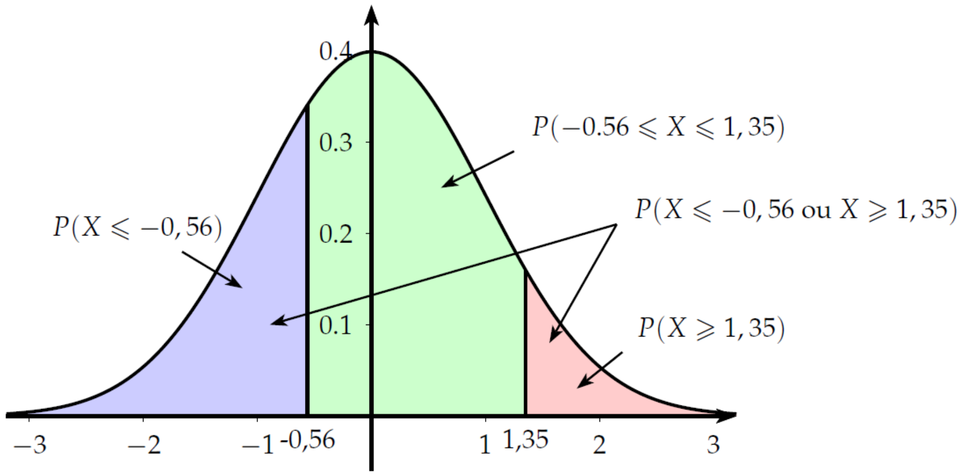
• La deuxième égalité est liée à l'évènement contraire : $p(X \geq a) = 1 - p(X \leq a)$.

• La troisième égalité est liée à la parité de la fonction φ. L'aire sous la courbe de la partie gauche est égale à l'aire sous la courbe de la partie droite.

EXEMPLES

Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite. A l'aide d'une table des valeurs de Φ (page 9), déterminer les probabilités suivantes :

- **a)** $p(X \geq 1{,}35)$
- **b)** $p(X \leq -0{,}56)$
- **c)** $p(-0{,}56 \leq X \leq 1{,}35)$
- **d)** $p(X \leq -0{,}56 \quad ou \quad X \geq 1{,}35)$



REPONSE

On repère sur la table page 9 :

$\Phi(0{,}56) \approx$ $\quad$ $et\ \Phi(1{,}35) \approx$

- **a)** $p(X \geq 1{,}35) =$ $\quad = \quad = \quad =$
- **b)** $p(X \leq -0{,}56) =$ $\quad = \quad = \quad =$
- **c)** $p(-0{,}56 \leq X \leq 1{,}35) =$ $\quad = \quad =$
- **d)** $p(X \leq -0{,}56 \quad ou \quad X \geq 1{,}35) =$ $\quad = \quad =$

TABLE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

LECTURE DIRECTE DE LA TABLE

VALEURS POSITIVES

Lire dans la table la valeur de $\Phi(1{,}06)$.
La valeur de Φ $(1{,}06)$ se trouve dans la table à **l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 0,06**.
On trouve donc : Φ $(1{,}06) =$

VALEURS NÉGATIVES

On utilise la symétrie de la courbe de densité de la loi normale, ce qui donne : $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$
Lire dans la table la valeur de Φ $(-2{,}93)$. $\quad \Phi\ (-2.93)\ =\ 1 - \Phi\ (2{,}93)$
La valeur de Φ $(2{,}93)$ se trouve dans la table à **l'intersection de la ligne 2,9 et de la colonne 0,03**.
On trouve donc : $\Phi(-2{,}93) = 1 - \Phi(2{,}93) = 1 - \qquad =$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

REMARQUE

Certaines valeurs interviennent souvent, il est bon de les mémoriser :

$p(-1 \leq X \leq 1) = 0{,}683$ $\quad$ $p(-2 \leq X \leq 2) = 0{,}954$ $\quad$ $p(-3 \leq X \leq 3) = 0{,}997$

d) Espérance et Variance

THEOREME

Si une variable aléatoire X suit une *loi normale centrée réduite* alors son ***espérance est nulle*** et sa ***variance*** est égale à 1.

REMARQUE

C'est pour cette raison que cette loi normale est centrée ($\boldsymbol{E(X) = 0}$) et réduite ($\boldsymbol{V(X) = 1}$).

e) Probabilité d'intervalle centré en 0

THEOREME

X est une variable aléatoire qui suit *une loi normale centrée réduite*. Soit α un réel de l'intervalle $]0\,;1[$. Il existe un **unique réel strictement positif $\boldsymbol{u_\alpha}$** tel que :

$$\boldsymbol{p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha}$$

DEMONSTRATION **ROC**

On cherche un réel x strictement positif tel que :

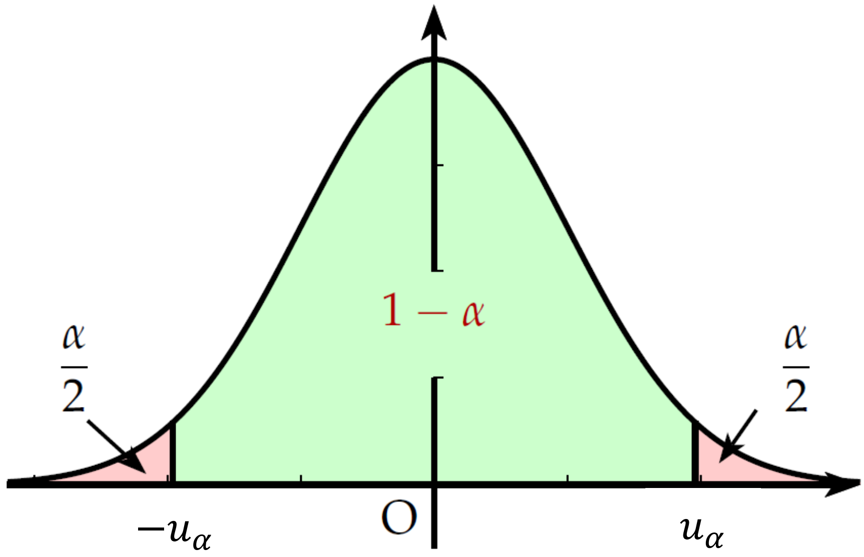
$$p(-x \leq X \leq x) = 1 - \alpha$$

$$= 1 - \alpha$$

$$= 1 - \alpha$$

$$= 1 - \alpha$$

$$\Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$



On sait que la fonction Φ est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. De plus,

$\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = \Phi(0) =$ $\quad$ *et* $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) =$ $\quad$ *et* $\quad$ $0 < \alpha < 1$ $\quad \Leftrightarrow \quad$ $< 1 - \frac{\alpha}{2} <$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x = u_\alpha$ strictement positif tel que

$\Phi(u_\alpha) =$.

REMARQUE

Il est bon de retenir les valeurs de $u_{0{,}05}$ et $u_{0{,}01}$. On obtient ainsi :

$$\boldsymbol{p(-1{,}96 \leq X \leq 1{,}96) = 0{,}95}$$

$$\boldsymbol{p(-2{,}58 \leq X \leq 2{,}58) = 0{,}99}$$

EXEMPLE

X suit une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Déterminer l'intervalle I centré en 0 tel que $p(X \in I) = 0{,}8$. On donnera les bornes de l'intervalle avec une précision de 10^{-2}.

REPONSE

On a donc : $1 - \alpha = 0{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0{,}2$.

On doit donc avoir : $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad u_\alpha = \Phi^{-1}(0{,}9)$.

A l'aide de la calculatrice avec la fonction « **FracNorm(0,9)** » ou à l'aide d'une table, on trouve :

$u_\alpha \approx 1{,}28$ donc $I = [-1{,}28\,;1{,}28]$.

2) Loi Normale Générale

a) Loi Normale d'espérance μ et d'écart type σ

DEFINITION

Si une variable aléatoire X suit une ***loi normale de paramètres μ et σ*** notée $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$**,** alors la variable aléatoire

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

suit la **loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0\,;1)$ et réciproquement.

PROPRIETE

Si une variable aléatoire X suit une **loi normale** $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ alors **son espérance vaut μ** et **sa variance vaut σ^2**.

DEMONSTRATION

De la linéarité de l'espérance, on en déduit :

$E(Z) = \underline{\qquad}$ comme $E(Z) =$ alors $E(X) =$

De plus, comme $V(aX) = a^2V(X)$, on a :

$V(Z) = \underline{\quad}$ comme $V(Z) =$ alors $V(X) =$

EXEMPLE

Les températures de l'eau du mois de juillet, autour du lac Léman suivent la loi normale d'espérance $18{,}2°C$ et d'écart-type $3{,}6°C$.

Une personne part camper en juillet sur le pourtour du lac Léman. Que peut-on lui indiquer comme probabilité de température de l'eau des plages dans les cas suivants :

a) Températures inférieures à $16°C$
b) Températures comprises entre $20°C$ et $24{,}5°C$
c) Températures supérieures à $21°C$.

REPONSE

On appelle T la variable associée aux températures et Z la variable aléatoire associée à la loi normale centrée réduite.

Il y a deux façons d'obtenir les résultats, soit on utilise une table et alors on doit revenir à la loi normale centrée réduite, soit on utilise la calculatrice et alors on peut utiliser la loi normale de l'énoncé.

a) On veut calculer : $p(\quad)$.
- Avec la calculatrice, on tape : « **normalFRép(** , , ,) », on trouve alors : 0,271.
- Avec une table, on revient à la variable X, on a alors :

$$\leq \quad \Leftrightarrow \quad Z \leq \frac{}{} \quad \text{donc} \quad Z \leq$$

On a alors : $\Phi(\quad) = 1 - \Phi(\quad) = 1 - \quad = 0{,}271$

b) On veut calculer : $p(\quad \leq T \leq \quad)$
- Avec la calculatrice, on tape : « **normalFRép(** , , ,) », on trouve alors : 0,268
- Avec une table, on revient à la variable X, on a alors :

$$\leq T \leq \quad \Leftrightarrow \quad \frac{}{} \leq Z \leq \frac{}{} \quad \text{donc} \quad \leq Z \leq$$

On a alors : $\Phi(\quad) - \Phi(\quad) = \quad - \quad = 0{,}268$

c) On veut calculer : $p(T \geq \quad)$
- Avec la calculatrice, on tape : « **normalFRép(** , , ,) », on trouve alors : 0,218
- Avec une table, on revient à la variable X, on a alors :

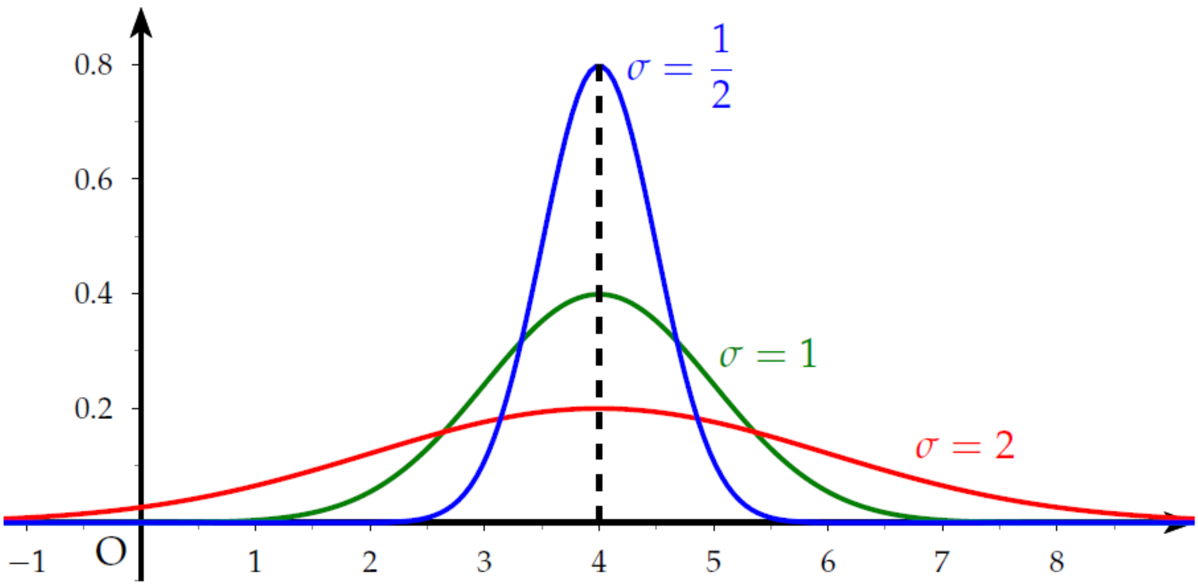
$$T \geq \quad \Leftrightarrow \quad Z \geq \frac{}{} \quad \text{donc} \quad Z \geq$$

On a alors : $1 - \Phi(\quad) = 1 - \quad = 0{,}218$

b) Influence de l'écart-type

Voici ci-dessous les courbes des densités correspondantes à une espérance de 4 et aux écarts-types respectifs de :

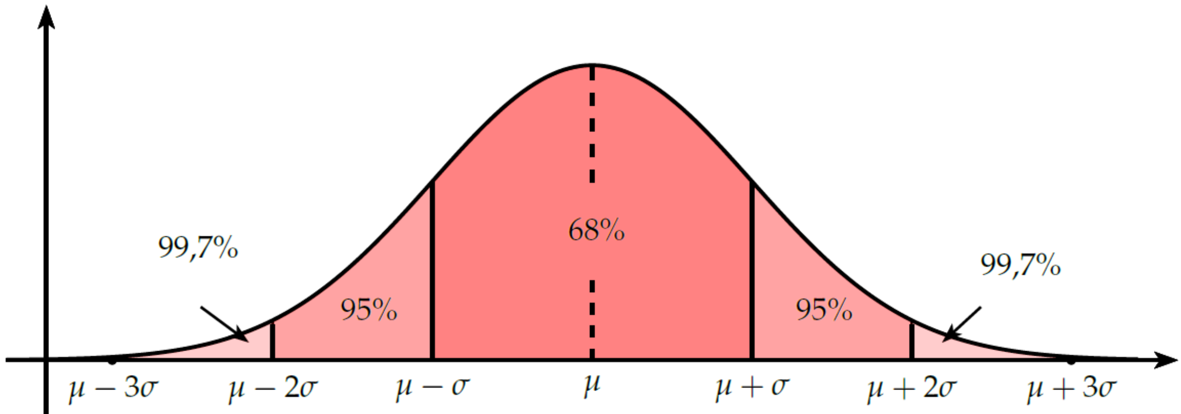
$\frac{1}{2}, 1\ et\ 2.$



On constate que plus l'écart-type est important, plus la courbe de densité est évasée et plus le maximum est petit. En effet, un écart-type important signifie que la dispersion des données est importante.

Ces différentes courbes peuvent être repérées par 3 intervalles caractéristiques :

$$[\mu - \sigma\,;\mu + \sigma], [\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]\ et\ [\mu - 3\sigma\,;\mu + 3\sigma].$$



On a alors :

- $\boldsymbol{p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68}$
- $\boldsymbol{p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95}$
- $\boldsymbol{p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997}$

c) Approximation normale d'une loi binomiale

THEOREME **THEOREME DE MOIVRE-LAPLACE**

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ et Z la variable aléatoire telle que :

$$\boldsymbol{Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}}.$$

Pour tous nombres a et b tels que $a < b$, on a :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} p(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}.$$

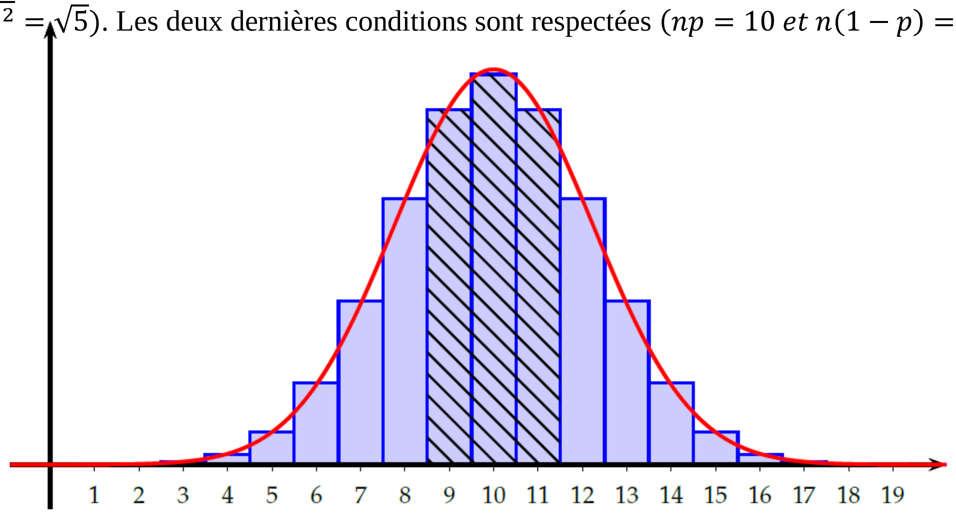
REMARQUE

Pour les grandes valeurs de n, la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ est proche de la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale lorsque l'on aura les conditions suivantes :

$$\boldsymbol{n \geq 30, \qquad np \geq 5 \qquad et \qquad n(1-p) \geq 5}$$

Dans l'exemple ci-dessous, on a tracé $\mathscr{B}(20\,;0{,}5)$ et la densité de la loi normale correspondante ($\mu = 20 \times 0{,}5 = 10$ et $\sigma = \sqrt{20 \times 0{,}5^2} = \sqrt{5}$). Les deux dernières conditions sont respectées ($np = 10$ et $n(1-p) = 10$)



Calculons $p(9 \leq X \leq 11)$ avec la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;0{,}5)$ puis avec la loi normale $\mathcal{N}(10\,;5)$.

- Avec la loi binomiale. Sur la calculatrice « **binomFdP(20 ; 0.5,{9,10,11})** »

$$p(9 \leq X \leq 11) \approx 0{,}496\,6$$

- Avec la loi normale. Comme on remplace un diagramme en bâton par un histogramme, il faut intégrer trois rectangles centrés en 9, 10 et 11, donc il faut calculer $8{,}5 \leq X \leq 11{,}5$. C'est ce que l'on appelle **la correction de continuité**. Avec la calculatrice : « **NormalFRép(8.5,11.5,10, $\sqrt{5}$)** ».

$$p(8{,}5 \leq X \leq 11{,}5) \approx 0{,}497\,7$$

L'erreur est donc de 0,1%.

Il se peut par contre que n soit grand et cependant p trop petit pour qu'on soit dans les conditions de l'approximation normale. Cela se produit par exemple lorsque l'on considère le nombre d'accidents provoqués par un vaccin, le nombre de suicides dans une grande ville, pour une période donnée.

Dans le cas des petites valeurs de p c'est-à-dire pour $p < 0{,}1$, l'approximation de la loi binomiale ne pourra pas se faire avec une loi normale.

Dans l'exemple ci-dessous, on a :

$n = 100$ et $p = 0{,}06$

d'où $E(X) = 6$ et $\sigma(X) = \sqrt{5{,}64}$

Calculons alors $p(8 \leq X \leq 10)$.

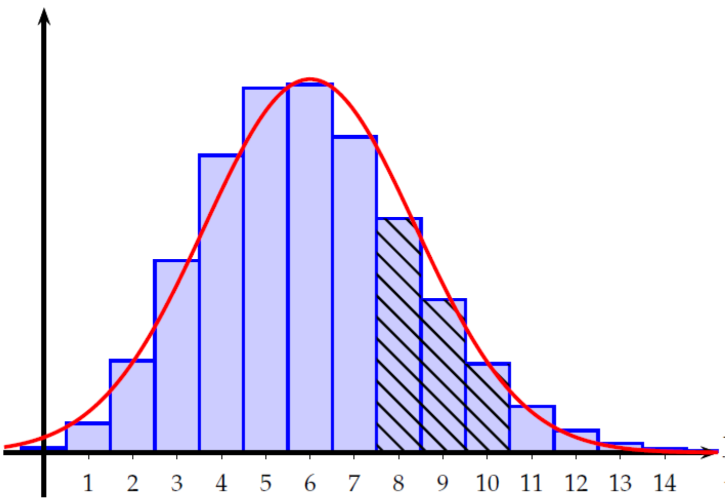
- Avec la loi binomiale :

$$p(8 \leq X \leq 10) \approx 0{,}214\,0$$

- Avec la loi normale :

$$p(7{,}5 \leq X \leq 10{,}5) \approx 0{,}234\,8$$

L'erreur est alors de 2 %.



EXEMPLE

On lance 180 fois un dé à jouer et on note X la variable aléatoire qui représente le nombre d'apparition du 6. En utilisant l'approximation normale, calculer au millième les probabilités suivantes :

a) $p(X \leq 20)$	**b)** $p(X > 40)$	**c)** $p(X \leq 20 \;\; ou \;\; X > 40)$

REPONSE

Il faut d'abord calculer les paramètres de la loi normale correspondante à cette loi binomiale $\mathscr{B}(180\,;\frac{1}{6})$:

$$E(X) = \quad = \qquad = \qquad et \qquad \sigma(X) = \qquad\qquad =$$

Il faut vérifier qu'on se trouve dans les hypothèses de l'approximation :

$$np = \quad \geq 5 \quad et \quad n(1-p) = \quad \geq 5$$

• A l'aide d'une calculatrice, on trouve alors :

a) $p(X \leq 20) = p_N(X \leq \qquad) = NormalFRép(\qquad\qquad\qquad) \approx$
b) $p(X > 40) = p_N(X \geq \qquad) = NormalFRép(\qquad\qquad\qquad) \approx$
c) $p(X \leq 20 \;\; ou \;\; X > 40) = p_N(X \leq \qquad) + p_N(X > \qquad) \approx$

• Si on utilise une table, il faut changer de variable

$$Z = \frac{\qquad}{\qquad}$$

a) $p(X \leq 20) = p_N(X \leq 20{,}5) = p_N\left(Z \leq \frac{\qquad\qquad}{\qquad}\right)$
$p(X \leq 20) = p_N(Z \leq -1{,}9) = \Phi(-1{,}9) = 1 - \Phi(1{,}9) \approx$
b) $p(X > 40) = p_N(X \geq \qquad) = p(Z \geq \qquad) \approx$

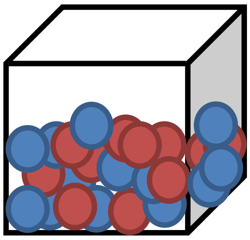
III) ÉCHANTILLONNAGE ET ESTIMATION

On se situe dans deux domaines des statistiques, qui sont ceux de « l'échantillonnage » et de « l'estimation ». Ces deux domaines ont des contextes d'applications différents qu'il faut savoir reconnaitre. Ces domaines appartiennent au champ des statistiques « inférentielles ».

1) Identification de la situation

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacun un très grand nombre de boules, rouges ou bleues.

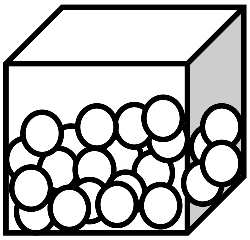
Dans **l'urne U_1**, **on connait la proportion p de boules rouges.**



On procède à des tirages avec remise de n boules, et on observe la fréquence d'apparition d'une boule rouge. Cette fréquence observée appartient « en général » à un **« intervalle de fluctuation »** de centre p dont la longueur diminue avec n. Cet intervalle est un **« intervalle de fluctuation »**.

On est ici dans le domaine de **<u>l'échantillonnage</u>** <u>et de</u> **<u>l'intervalle de fluctuation</u>**.

Dans **l'urne U_2**, **on ignore la proportion de boules rouges.**



En procédant à des tirages avec remise de n boules, on va essayer d'estimer la proportion p de boules rouges dans l'urne, proportion dont on n'a aucune idée à priori. Cette estimation se fait au moyen d'un **« intervalle de confiance »**. Cet intervalle dépend d'un coefficient, le **« niveau de confiance »**, que l'on attribue à l'estimation.

On est ici dans le domaine de **<u>l'estimation</u>**, <u>et de</u> **<u>l'intervalle de confiance</u>**.

2) Intervalle de fluctuation ou intervalle de confiance : lequel utiliser ?

On s'intéresse à une population dont on étudie un caractère particulier.

ECHANTILLONNAGE	ESTIMATION
On utilise un intervalle de fluctuation quand : • on **connait la proportion** p de présence du caractère dans la population **OU** • on **fait une hypothèse sur la valeur de cette proportion** (*on est alors dans le cas de la* « ***prise de décision*** »).	*On utilise un intervalle de confiance quand* : • on **ignore la proportion** p de présence du caractère dans la population **ET** • on ne **formule pas d'hypothèse sur cette valeur**.

EXEMPLES

ECHANTILLONNAGE	ESTIMATION
On dispose d'une pièce de monnaie. Comment décider qu'elle est « équilibrée » ou pas ? On va ici faire l'hypothèse que la fréquence d'apparition de « Pile », par exemple, est égale à 0,5, et on va tester cette hypothèse. On est dans une **situation d'échantillonnage**.	Une usine fabrique des fusées de feux d'artifice. Sur 100 fusées choisies au hasard à l'issue du processus de fabrication et mises à feu, on trouve 12 fusées qui ne fonctionnent pas. Comment se faire une idée de la proportion des fusées défectueuses dans la production ? On est dans une **situation d'estimation** : on n'a, au départ, aucune idée de la valeur de la proportion étudiée dans la production.

3) Échantillonnage : *Intervalle de fluctuation asymptotique.*

On dispose d'une urne contenant un très grand nombre de boules rouges et bleues. On sait que la proportion de boules rouges dans l'urne est égale à $p = 0{,}4$. Si on tire, successivement avec remise, n boules dans l'urne (n entier naturel non nul), et si on appelle X_n la variable aléatoire dénombrant les boules rouges tirées, alors X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$.

REMARQUE : on connait la proportion des boules rouges dans l'urne.

THEOREMES ET DEFINITION

Soit X_n une variable aléatoire suivant **une loi binomiale** $\mathscr{B}(\boldsymbol{n}\,;\boldsymbol{p})$, et α un réel tel que $0 < \alpha < 1$.

Si X est une variable aléatoire suivant **la loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(\mathbf{0}\,;\mathbf{1})$, on appelle $\boldsymbol{u_\alpha}$, l'unique réel tel que :

$$\boldsymbol{p(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1-\alpha}$$

- On appelle I_n l'intervalle :

$$\boldsymbol{I_n = \left[p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]}.$$

Alors : $$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} p\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha}.$$

- L'intervalle I_n contient la fréquence $\boldsymbol{F_n = \frac{X_n}{n}}$ avec une probabilité qui ***se rapproche de*** $\boldsymbol{1-\alpha}$ lorsque n augmente : on dit que **c'est un intervalle de fluctuation asymptotique de $\boldsymbol{F_n}$ au seuil $\boldsymbol{1-\alpha}$.**

DEMONSTRATION **ROC**

On pose $Z_n = \frac{\qquad}{\sqrt{\qquad}}$ et on applique le théorème de Moivre – Laplace.

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$: $\lim\limits_{n\to+\infty} p(Z_n \in [-u_\alpha\,;\,u_\alpha]) = \qquad$.

Or $Z_n \in [-u_\alpha\,;\,u_\alpha] \Leftrightarrow -u_\alpha \le \frac{\qquad}{\sqrt{\qquad}} \le u_\alpha$.

Donc $Z_n \in [-u_\alpha\,;\,u_\alpha] \Leftrightarrow \qquad \le X_n \le \qquad$

$Z_n \in [-u_\alpha\,;\,u_\alpha] \Leftrightarrow \qquad \le \frac{X_n}{n} \le \qquad$. Donc $Z_n \in [-u_\alpha\,;\,u_\alpha] \Leftrightarrow X_n \in I_n$.

EXEMPLE

On tire 50 boules de l'urne décrite ci-dessus, et on souhaite déterminer un intervalle de fluctuation au seuil 0,9 (c'est-à-dire avec $\alpha = 0{,}1$). A l'aide de la calculatrice, on trouve pour valeur approchée à 10^{-3} près de $u_{0,1}$.

$$= \quad donc$$

$$\Phi(u_{0,1}) =$$

$$u_{0,1} =$$

On obtient pour intervalle de fluctuation :

$$I_{50} = \left[\qquad ; \qquad \right].$$

soit $I_{50} = [\quad ; \quad]$.

Ainsi, en effectuant 50 tirages dans cette urne, la fréquence d'apparition d'une boule rouge est comprise entre et avec une probabilité d'environ .

Pour 500 tirages, au même seuil 0,9, on obtient $I_{500} = [\quad ; \quad]$: la longueur de l'intervalle a, pour un même seuil, été divisée par plus de en passant de 50 à 500 tirages.

PROPRIETE

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$ est l'intervalle :

$$\boldsymbol{I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]}.$$

REMARQUE

- Cette propriété découle de la loi normale centrée en 0 ; on a vu en effet que $u_{0,05} \approx 1{,}96$.
- Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil $1-\alpha$ correspond à une ***approximation*** : on ne connait pas les termes de la suite (p_n), où

$$\boldsymbol{p_n = p\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right)}.$$

- On sait toutefois que (p_n) converge vers $1-\alpha$, et on considère que la limite $1-\alpha$ est une *valeur approchée de* p_n, **sous certaines conditions** qui sont : $\boldsymbol{n \geq 30, np \geq 5, n(1-p) \geq 5}$.

4) Estimation

a) Notion d'intervalle de confiance

On dispose d'une urne contenant un très grand nombre de boules rouges et bleues. On ***ignore quelle est la proportion*** *p de boules rouges dans l'urne et* ***rien ne permet de faire une hypothèse*** *sur la valeur de p.*

L' « estimation » consiste à chercher, à « deviner, estimer » avec ***un certain niveau de confiance****, quelle valeur peut prendre p, en s'appuyant sur les informations recueillies en procédant à des tirages au sort aléatoires.*

THEOREME

Soit X_n une variable aléatoire suivant **une loi binomiale** $\mathscr{B}(n\,;p)$ où p est la proportion inconnue d'apparition d'un caractère, et $\boldsymbol{F_n = \frac{X_n}{n}}$ la fréquence associée à X_n. Alors, pour n **suffisamment grand**, p appartient à l'intervalle $\boldsymbol{\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\,; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}$ avec une **probabilité supérieure ou égale à 0,95**.

DEMONSTRATION **ROC**

• Soit la variable aléatoire $Z_n = \frac{\quad}{\sqrt{\quad}}$, et la suite (a_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$a_n = p(\quad \leq Z_n \leq \quad).$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, la suite (a_n) converge vers l avec : $l = p(\quad \leq Z \leq \quad)$ où Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Or on a : $l \geq$ (avec la calculatrice : $l \approx$.

Soit un réel ε tel que $0 < \varepsilon < 0{,}004$ ainsi $l - \varepsilon \geq 0{,}95$. Par définition de la convergence vers l, il existe un entier naturel n_0 tel que : si n entier et $n \geq n_0$ alors $a_n \in]l - \varepsilon\,; l + \varepsilon[$.

Ainsi, pour $n \geq n_0$: $a_n \geq 0{,}95$. Comme dans la démonstration précédente, on a :

$$p(\quad \leq Z_n \leq \quad) \geq \quad \Leftrightarrow p\left(\quad \leq F_n \leq \quad\right) \geq$$

L'étude de la fonction $p \mapsto p(1-p)$ sur l'intervalle $]0\,;1[$ permet de majorer $p(1-p)$ par son maximum

sur $]0\,;1[$, donc par , et par

Cette majoration a pour effet « d'agrandir » l'intervalle donc d'augmenter sa probabilité. On obtient finalement :

$$pour\ n \geq n_0 \quad : \quad p\left(\quad \leq F_n \leq \quad\right) \geq p\left(\quad \leq F_n \leq \quad\right) \geq \quad .$$

• On a $\quad \leq F_n \leq \quad \Leftrightarrow \quad \leq p \leq$

Avec les notations précédentes, on a : $pour\ n \geq n_0 \quad : \quad p\left(\quad \leq F_n \leq \quad\right) \geq \quad ;$

On en déduit donc : pour n entier, $n \geq n_0$, $p\left(\quad \leq p \leq \quad\right) \geq \quad .$

DEFINITION

On réalise l'expérience aléatoire de n tirages au hasard, et on appelle f ***la fréquence observée d'apparition du caractère***. L'intervalle

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

est appelé **intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95**, où p est la proportion (*inconnue*) d'apparition du caractère dans la population.

REMARQUE

Le « niveau de confiance 95 % » signifie que si l'on effectuait un très grand nombre de tirages de 100 boules, on devrait obtenir moins de 5 % d'intervalles de confiance ne contenant pas la proportion p de boules rouges.

EXEMPLE

Dans l'urne ci-dessus, on réalise un tirage de 100 boules ; on obtient 59 rouges et 41 bleues ; la fréquence observée de sortie du rouge est donc 0,59. L'intervalle

$$\left[\qquad ; \qquad \right] = [\quad ; \quad]$$

est un intervalle de confiance de la proportion de boules rouges dans l'urne au niveau de confiance 95 %.

b) Précision d'une estimation et taille de l'échantillon

On a vu ci-dessus qu'en tirant 100 boules de l'urne, l'intervalle de confiance obtenu est de longueur 0,2 ; on peut trouver cet intervalle trop grand. En procédant à un tirage de 400 boules, si f est la fréquence observée de sortie du rouge, on obtient un intervalle de confiance au niveau 95 % égal à :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{400}} \,; f + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [f - 0{,}05 \,; f + 0{,}05].$$

Son amplitude, deux fois moindre que la précédente, est de 0,1.

Plus généralement, on retiendra :

Un intervalle de confiance au niveau 95 % est d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Plus la taille de l'échantillon est grande, plus les intervalles de confiance obtenus sont précis.

EXEMPLE

Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure à 0,01 de la proportion de boules rouges dans l'urne, il faut procéder à des tirages de n boules, avec

$$\leq \qquad soit \quad \leq \qquad ou\ encore \quad n \geq \qquad .$$

Pour obtenir des intervalles de confiance au niveau 0,95 d'amplitude inférieure à 0,01, il faut procéder à au moins tirages.

5) Deux exemples

a) Utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique pour une prise de décision

ÉNONCÉ

Dans un casino, il a été décidé que « les machines à sous » doivent être réglées sur une fréquence de gain du joueur de $g = 0{,}06$. Une fréquence inférieure est supposée faire « fuir le client », et une fréquence supérieure est susceptible de ruiner le casino.

Trois contrôleurs différents vérifient une même machine.

Le premier a joué 50 fois et gagné 2 fois, le second a joué 120 fois et gagné 14 fois, le troisième a joué 400 fois et gagné 30 fois.

En utilisant des intervalles de fluctuations asymptotiques au seuil de 95 %, examiner dans chaque cas la décision à prendre par le contrôleur, à savoir accepter ou rejeter l'hypothèse $g = 0{,}06$.

REPONSE

b) Utiliser un intervalle de confiance

ÉNONCÉ

Une usine fabrique des pièces métalliques, qui sont censées résister à certaines contraintes mécaniques. Le responsable de fabrication souhaite estimer le taux de pièces défectueuses concernant la résistance mécanique dans la production.

Pour cela, il utilise la méthode par intervalle de confiance au niveau 95 %, en extrayant au hasard n pièces en fin de production, qui sont soumises à contrainte mécanique jusqu'à la rupture. En fonction du niveau de contrainte à la rupture, on décide de la nature défectueuse ou pas de la pièce.

1) Chaque pièce testée étant détruite, le responsable souhaite minorer la taille de l'échantillon testé, tout en ayant un intervalle de confiance de longueur inférieure à 0,1. Quelle taille d'échantillon peut-on lui conseiller ?

2) Il est finalement décidé de mener l'étude sur 500 pièces ; on en trouve 40 défectueuses. Quel intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 % obtient-on ?

3) L'année précédente, à l'issue d'un problème grave de rupture d'une pièce, une large étude avait débouché sur 130 pièces défectueuses dans un échantillon de 1 000. Peut-on supposer que la mise en place de nouvelles procédures de fabrication a vraiment diminué la proportion de pièces défectueuses ?

REPONSE