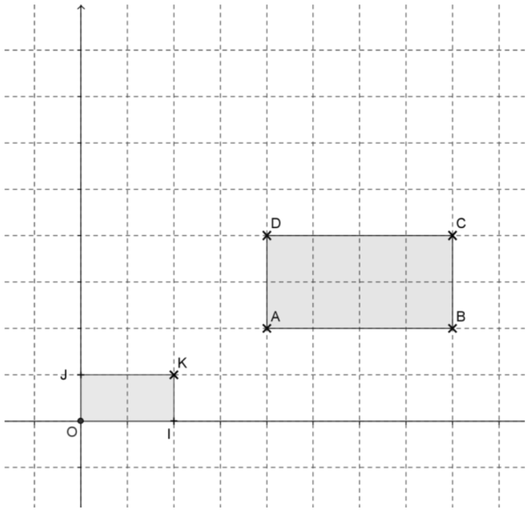
INTEGRATION

I- Intégrale d'une fonction continue positive :

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).

On considère alors comme **unité d'aire,** l'aire du rectangle $OIKJ$.

On notera dans la suite **u.a.** pour unité d'aire.



Exemple :

Le rectangle $ABCD$ a pour aire 4 u.a.

Si les unités graphiques sont 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée, alors 1 u.a. = 2 cm^2 donc $ABCD$ a pour aire 8 cm^2.

Définition

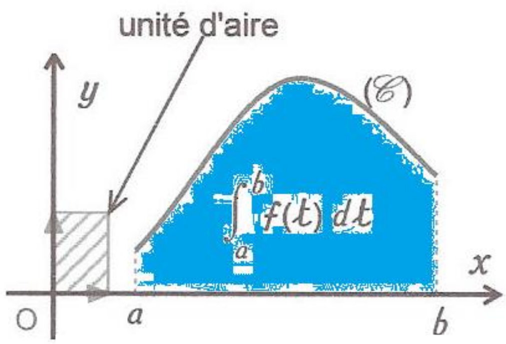
Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O ; I ; J).

On appelle intégrale de a à b de la fonction f,

et on note $\int_a^b f(x)dx$ l'aire, en unités d'aire,

l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, c'est-à-dire l'ensemble des points

$M(\,x\,;\,y\,)$ tels que $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$



On parle souvent

d'aire sous la courbe.

Remarques :

* L'intégrale de f, continue et positive sur $[\,a\,;\,b\,]$, est **un nombre positif.**
* On dit que a et b sont les bornes de l'intervalle.

* $\int_a^b f(x)dx$ se lit : " intégrale de a à b de $f(x)dx$"

* La variable x est appelée variable « muette », car elle n'intervient pas dans le résultat final. On peut donc remplacer x par n'importe quelle autre variable :

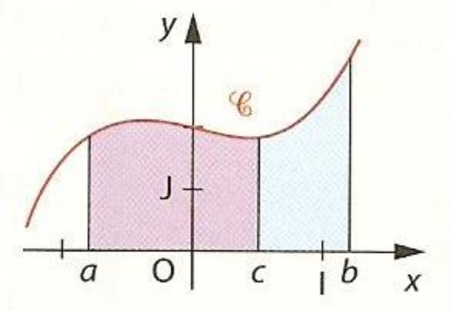
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

Soit f une fonction continue positive sur $\mathbb{R}$. Certaines propriétés sur les aires se traduisent immédiatement en termes d'intégrales :

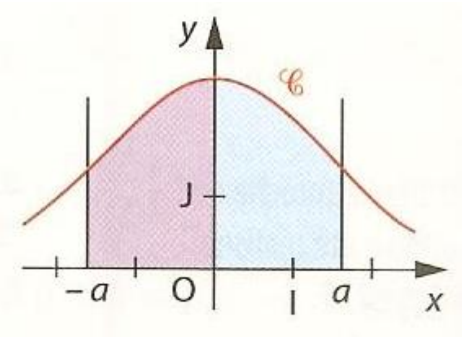
Additivité des aires

Si $c \in [\,a\,;\,b\,]$ alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Conservation par symétrie



Si $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées alors, pour tout $a > 0$,

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

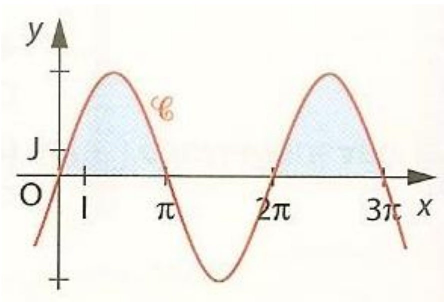
d'où $$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Conservation par translation

Exemple :

La courbe de la fonction sinus est invariante par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{OI}$ donc

$$\int_0^{\pi} sin(x)dx = \int_{2\pi}^{3\pi} sin(x)dx$$



Exercices :

- On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

  1- Représenter graphiquement f sur $[-4\ ;\ 6]$ puis colorier l'aire dont la mesure est définie par $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ puis déterminer cette mesure.

  2- On donne $F(x) = \frac{x^2}{4} + 2x - 3$.

  a. Calculer la dérivée de F. Que remarque-t-on ? *(on dit que F est une **primitive** de f sur $\mathbb{R}$).*

  b. Calculer $F(4) - F(-2)$. Qu'observe-t-on ?

- Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 1$

  1 – Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

  2 – Déterminer $\int_{3}^{5} f(x)dx$

II- Primitive d'une fonction continue sur un intervalle :

Propriété

Si f est une fonction continue et positive sur $[\,a\ ;\ b\,]$ alors la fonction F définie sur $[\,a\ ;\ b\,]$ par $F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx$ est une primitive de f sur $[\,a\ ;\ b\,]$.

F ainsi définie est l'unique primitive de f s'annulant en a.

+ démonstration.

Définition

Une fonction F dérivable sur un intervalle I et de dérivée $F' = f$ est appelée **une primitive** de f sur I.

Exemple :

Si $F(x) = 2x^2 + 4x$ sur $\mathbb{R}$ alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 4x + 4$.

F est donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 4x + 4$.

Exercice :

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Trouver dans chacun des cas suivants **une** primitive de f :

a. $f(x) = 2$ **b.** $f(x) = x$ **c.** $f(x) = -4x^2$ **d.** $f(x) = 5x$

e. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ **f.** $f(x) = -2x^2$ **g.** $f(x) = 2x^5$ **h.** $f(x) = \frac{x-3}{2}$

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

+ démonstration.

Propriétés

- Si F_0 est une primitive de f sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions F de la forme $F = F_0 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Soit f une fonction ayant des primitives sur un intervalle I ; soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
  Il existe une et une seule primitive de F de f prenant la valeur y_0 en x_0 c'est-à-dire telle que $F(x_0) = y_0$.

+ démonstration.

Remarque :

On admettra que toute fonction continue sur un intervalle I a des primitives sur I.

Certaines fonctions non continues peuvent aussi avoir des primitives.

Exercices :

* Pour chacune des fonctions f suivantes, donner l'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I :

a. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ $\quad I = \mathbb{R}$ **b.** $f(x) = -x^2 + 3$ $\quad I = \mathbb{R}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad I =]\,0\,;\,+\infty\,[$ **d.** $f(x) = e^x$ $\quad I = \mathbb{R}$

* Soit f définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$

Déterminer l'ensemble des primitives de f. Existe-t-il une primitive F de f telle que $F(1) = 2$?

* On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ prenant la valeur 0 en 2.

* On étudie en fonction du temps t le déplacement d'une balle dans le plan rapporté à un repère orthonormé. A chaque instant $t \geq 0$, le vecteur vitesse de la balle a pour coordonnées $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$.

On sait que : $f(t) = V_A cos\,\alpha$ et $g(t) = V_A sin\,\alpha - g \times t$ où V_A, α et g sont trois réels fixés.

1- Donner toutes les primitives F de f et toutes les primitives G de g (on rappelle que la variable est t).

NB : $F(t)$ et $G(t)$ correspondent aux coordonnées de la balle à l'instant t.

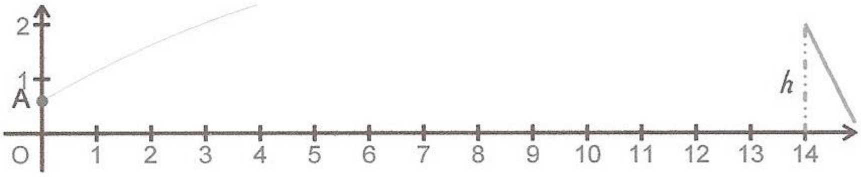
2- Sachant qu'à l'instant $t = 0$, la balle se trouve en $A(\,0\,;\,0{,}6\,)$, on doit avoir $F(0) = 0$ et $G(0) = 0{,}6$. Déterminer alors F et G.

3- On donne $g = 9{,}81$; $V_A = 14$; $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

a. Déterminer la position de la balle lorsque $t = 1$.

On donnera des valeurs approchées à 10^{-1} près des coordonnées.

b. On suppose que la balle se dirige vers un but de hauteur $h = 2$ (schéma ci-dessous) :



La balle entre-t-elle dans le but ?

<u>Remarque :</u>

Une fonction peut avoir une primitive, sans qu'il soit possible d'en donner une expression à partir des fonctions « usuelles ».

C'était la cas $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ avant que l'on ne définisse la fonction logarithme népérien.

C'est aussi le cas, par exemple, pour la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ et pour bien d'autres.

III- Calcul d'intégrales et de primitives :

Propriété

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ et si F est une primitive de f sur $[\,a\,;\,b\,]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

\+ démonstration.

<u>Remarque :</u>

On note aussi $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ qui se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

<u>Exemple :</u>

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx = [sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin(0) = 1$$

Pour un grand nombre de fonctions, vous avez réussi à trouver des primitives par « lecture inverse » du tableau des dérivées.

Pour d'autres, on ne connait pas d'expression explicite des primitives, $x \mapsto e^{-x^2}$ par exemple, et on ne peut pas calculer de façon exacte une de ses intégrales.

Primitives des fonctions usuelles

L'intervalle I devra être convenablement choisi. $k \in \mathbb{R}$.

Fonction	Primitives	Fonction	Primitives	Fonction	Primitives
$f(x) = 0$	$F(x) = k$	$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ln(x) + k$
$f(x) = 1$	$F(x) = x + k$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = a$ $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$f(x) = sin\, x$	$F(x) = -cos\,(x) + k$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$f(x) = cos\, x$	$F(x) = sin(x) + k$

Exercice :

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f sur I.

a. $f(x) = x^7$ **b.** $f(x) = \frac{1}{x^3}$ **c.** $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

Propriétés

Soit I un intervalle.

- Si F est une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Si F est une primitive de f sur I et $a$un réel, alors aF est une primitive de af sur I.

+ démonstration.

Remarques :

- Bien connaitre les dérivées usuelles suffit donc. On « ajuste » ensuite les coefficients grâce à la formule $(ku)' = ku'$ pour $k \in \mathbb{R}$ et u dérivable.
- Une primitive d'un produit ne sera **pas** obtenue en prenant le produit des primitives, puisque la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées. Il en est de même pour un quotient.

Exercice :

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner toutes les primitives de f sur un intervalle I à déterminer.

a. $f(x) = 5x^2 + x + \frac{2}{x}$ **b.** $f(x) = 3sin(x) + 2cos(x)$ **c.** $f(x) = \frac{e^x + 4}{3}$

Propriétés

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonctions	Conditions	**Une** primitive F
$u'\,u^n$	$n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, n \neq$ et $u(x) \neq 0$ si $n < 0$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0$ sur I	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ sur I	$\sqrt{u}$
$u'\,e^u$		e^u
$\frac{u'}{u}$	$u(x) > 0$ sur I	$ln(u)$
$sin\,(ax+b)$	$a \neq 0$	$-\frac{1}{a}cos\,(ax+b)$
$cos\,(ax+b)$	$a \neq 0$	$\frac{1}{a}cos\,(ax+b)$

+ démonstration.

Exercice :

1- Donner une primitive de la fonction f et préciser un intervalle I sur lequel cette primitive est définie.

a. $f(x) = 2(2x+1)^3$ **b.** $f(x) = sin(x)cos^3(x)$ **c.** $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ **d.** $f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+3}$

e. $f(x) = e^{3x+1}$ **f.** $f(x) = \frac{2x^2+3x+5}{x}$ **g.** $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$

2- Donner l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$;

a. $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ **b.** $f(x) = \frac{1}{e^x}$

IV- Intégrale d'une fonction de signe quelconque :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $a \in I$ et $b \in I$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I.

Remarque :

Cette définition ne dépend pas de la primitive choisie puisque ces primitives diffèrent entre elles d'une constante.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b, c des réels de I.

$*$ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

$*$ Relation de Chasles (rencontrée dans le cas où f est positive ou nulle sur I ; voir page 2 : additivité) :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$*$ Linéarité :

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Pour tout λ réel : $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

\+ démonstration.

Remarque :

On en déduit aussi que: $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Exercice :

Soit, pour n entier naturel, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$

1 − Calculer I_0

2 − Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$

3 − En déduire I_1, I_2 et I_3.

Propriétés

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux réels tels que $\boldsymbol{a \leq b}$ (et uniquement dans ce cas) :

$*$ Si f est positive sur I, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

$*$ Si f est négative sur I, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

$*$ Si $f \leq g$ sur I, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

\+ démonstration.

Exercice :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$. On ne demande pas de calculer les intégrales.

1 – Montrer que $\int_{-1}^{0} f(x)dx \geq 0$ **2 –** Montrer que $2 \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx \leq 2e$

V- Calculer une aire à l'aide d'une intégrale :

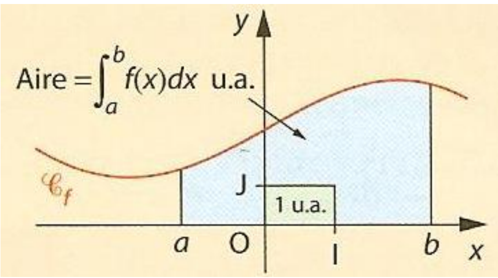
Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b des réels de I tels que $\boldsymbol{a \leq b}$.

Soit E la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

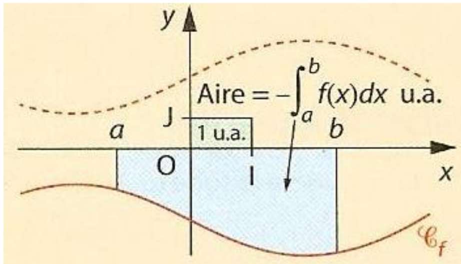
* Si $f \geq 0$ sur I,

$$\text{Aire(E)} = \int_a^b f(x)dx \text{ u. a.}$$



* Si $f \leq 0$ sur I,

$$\text{Aire(E)} = -\int_a^b f(x)dx \text{ u. a.}$$



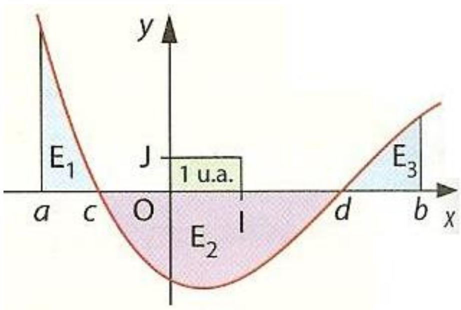
+ démonstration.

Conséquence

Si f change de signe sur I, on partage E en différentes parties situées soit en-dessous soit au-dessus de l'axe des abscisses.

Par exemple ci-contre :

Aire(E)=aire(E_1)+aire(E_2)+aire(E_3)



$$\text{Aire}(E) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx, \text{en u. a.}$$

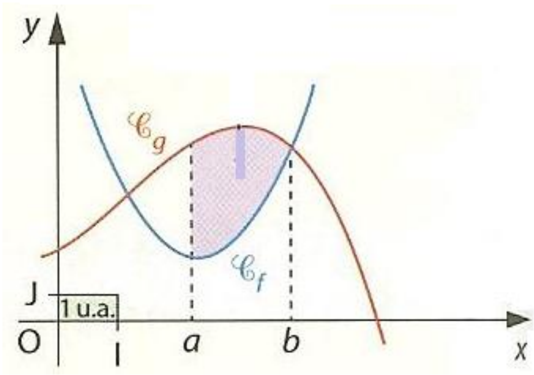
$\int_a^b f(x)dx$ est donc la somme des "aires algébriques".

Exercice :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Représenter graphiquement f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ puis calculer l'aire de la portion fermée du plan située entre la courbe et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -4$ et $x = 2$.

Entre deux courbes - Propriété admise.



Si f et g sont deux fonctions continues telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [\, a\,;\, b\,]$ (avec $a \leq b$).

L'aire comprise entre les deux courbes sur l'intervalle $[\, a\,;\, b\,]$ est :

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

Exercice :

Déterminer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 3$, la droite D d'équation $y = 2x - 3$ et les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Faire une figure.

VI- Valeur moyenne d'une fonction :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\, a\,;\, b\,]$ $(a \neq b)$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur $[\, a\,;\, b\,]$ le nombre réel: $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Remarque :

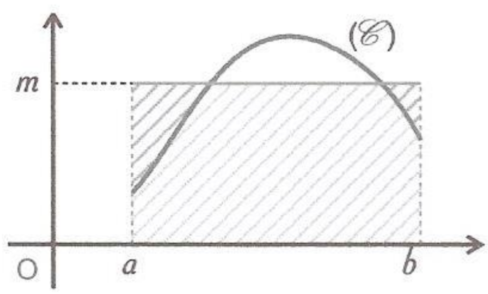
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[\, a\,;\, b\,]$ $(a \neq b)$.

Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\, O\,;\, I\,;\, J\,)$.

La valeur moyenne de f sur $[\, a\,;\, b\,]$ est le nombre réel m tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = m(b-a)$$

m est donc le nombre réel pour lequel l'aire du rectangle est égale à l'aire sous la courbe de f.

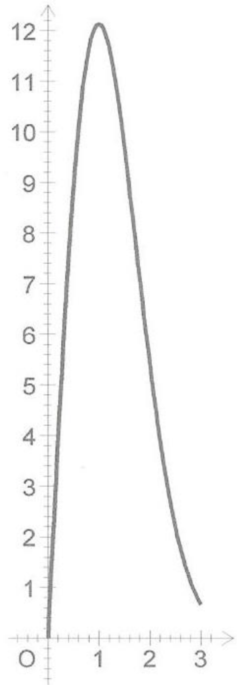


Exercice :

Une société d'achat en ligne veut analyser le déroulement d'une vente promotionnelle « flash » qu'elle a organisé sur Internet.

Cette vente, d'une durée annoncée de trois minutes, a provoqué sur son site un flux financier que l'on peut supposer continu et dont la vitesse instantanée a été variable en fonction du temps.

On a pu modéliser cette vitesse pendant les trois minutes de l'ouverture du site par la fonction f définie par $f(t) = 20t\,e^{-\frac{t^2}{2}}$ où t est le temps, exprimé en minutes ($t \in [\,0\,;\,3\,]$) et $f(t)$ la vitesse instantanée de ce flux, exprimée en milliers d'euros par minute.



1- Déterminer une primitive F de la fonction f.

2- En déduire l'aire du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 3$, exprimée en unités d'aire.

3- Quelle est la valeur moyenne de f sur $[\,0\,;\,3\,]$?

4- Quelle a été la somme totale transférée à la fin des trois minutes (à un euro près) ?