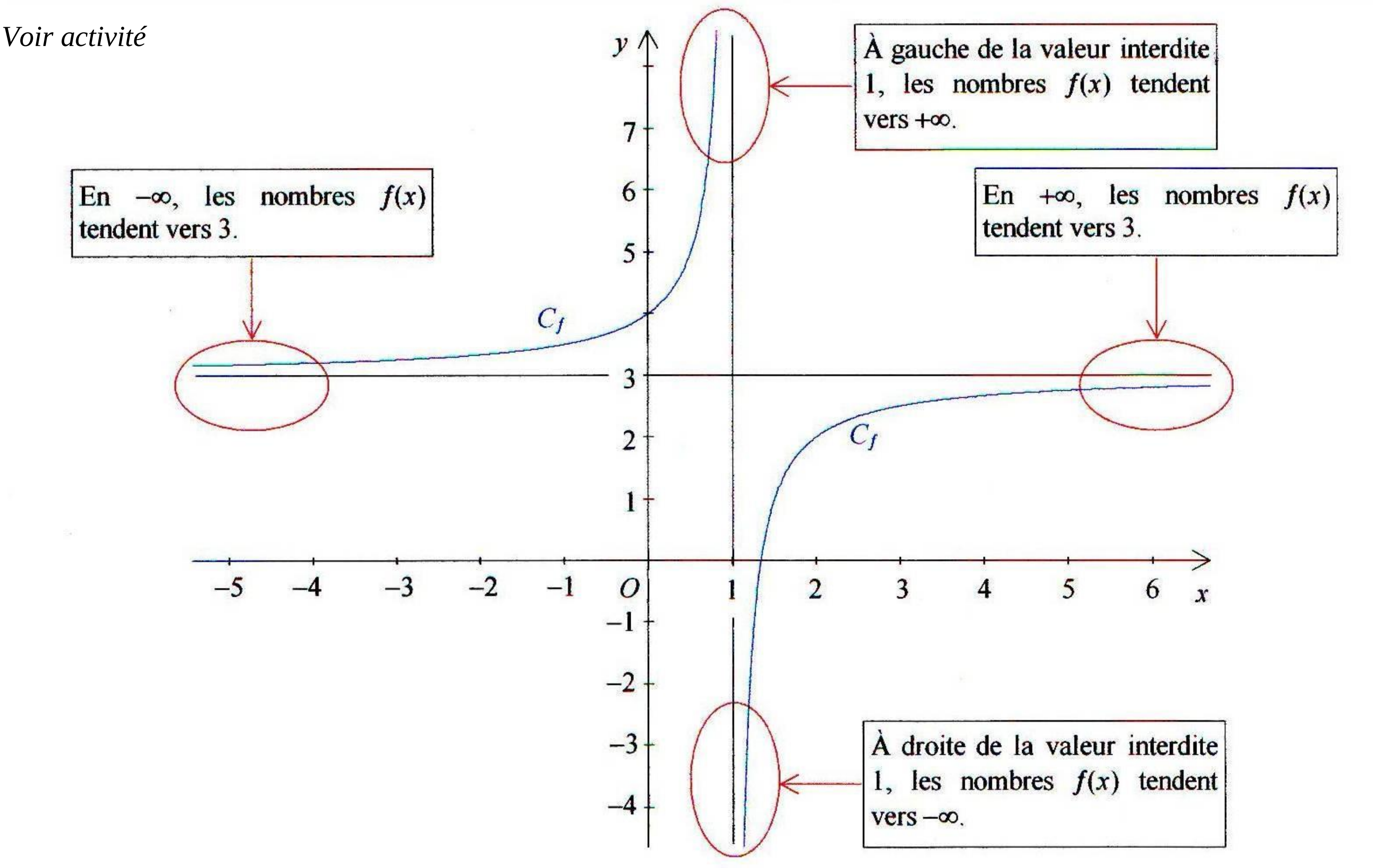
FONCTIONS : Limites - Continuité - Dérivée - Trigonométrie

I) PRELIMINAIRES

Voir activité



II) LIMITE D'UNE FONCTION EN $+\infty$ *et* $-\infty$

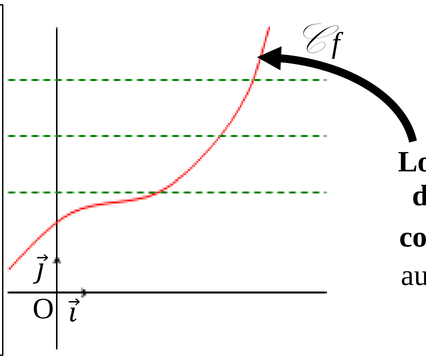
1) Limite infinie en $+\infty$ *et* $-\infty$

DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$ où a est un réel.

Si « *$f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand* **», alors on dit que f a pour limite $+\infty$ *en* $+\infty$.**

On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la courbe $\mathscr{C}f$ finit par se situer au-dessus de n'importe quelle droite horizontale.

REMARQUE :

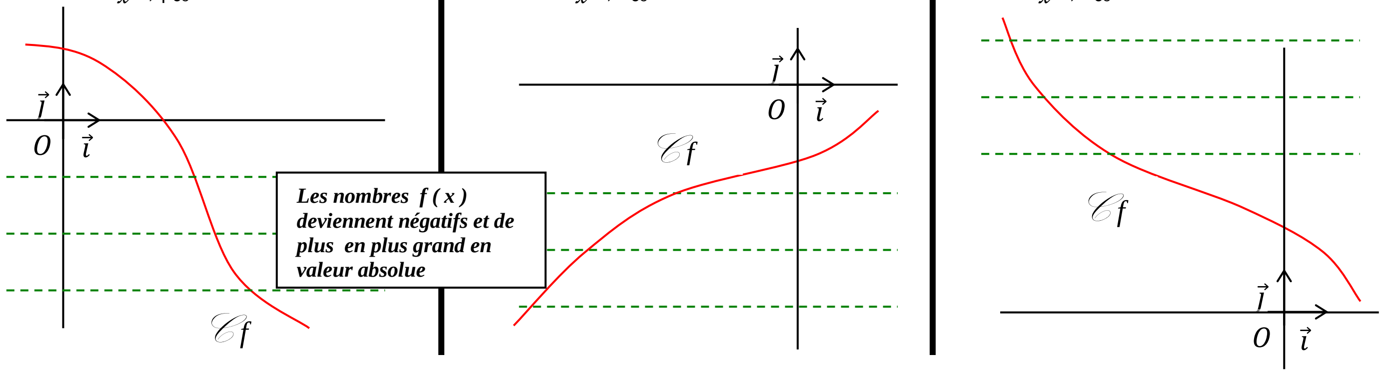
- **De manière plus mathématique :** pour tout réel $M > 0$, il existe un réel m tel que, si $x > m$ *alors* $f(x) > M$.
- **On dit aussi que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.**

Exemples à connaitre :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x =$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 =$ • $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^n =$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$

On définit de la même façon…

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Dans ces deux cas, f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; b]$

Exemples à connaitre :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x =$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 =$

- $n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n =$ **si n est pair** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n =$ **si n est impair**

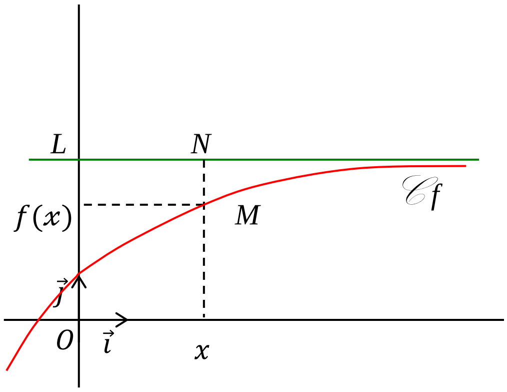
2) Limite finie en $+\infty$ *et* $-\infty$ et ASYMPTOTE HORIZONTALE

DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$ où a est un réel. f a pour limite le réel L quand x tend vers $+\infty$ si les images de $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de L, à condition de prendre x suffisamment grand.

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

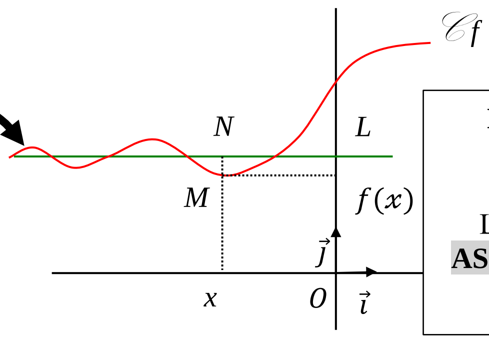
On dit alors que la droite d'équation $y = L$ est **ASYMPTOTE HORIZONTALE** à la courbe $\mathscr{C}f$ en $+\infty$.



On définit de la même façon…

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

f est définie de la forme $]-\infty\,;b]$



La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

La droite d'équation $y = L$ est **ASYMPTOTE HORIZONTALE** à la courbe $\mathscr{C}f$ en $-\infty$.

Exemples à connaitre :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} =$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} =$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} =$

REMARQUE *La courbe représentative de la fonction inverse admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.*

Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand x tend vers $+\infty$:
par exemple : $x \longmapsto \sin x$ *et* $\cos x$

3) Asymptote Oblique

DEFINITION

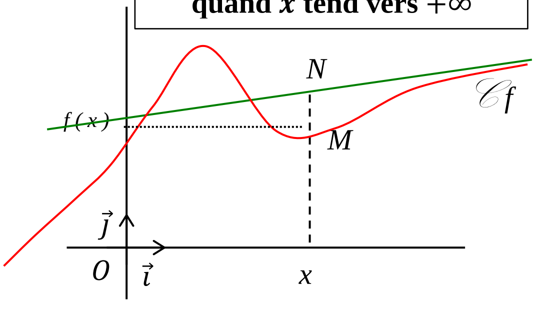
Soit a $(a \neq 0)$ et b deux réels et $\mathscr{C}f$ la courbe représentant **une fonction f dans un repère. Dire que la droite d'équation**

$y = a\,x + b$ est ASYMPTOTE OBLIQUE à $\mathscr{C}f$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) revient à dire que

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (a\,x + b)] = 0$$

(respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (a\,x + b)] = 0$)

La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$



REMARQUE

***Une fonction peut avoir une limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ sans que sa courbe possède une asymptote** : c'est le cas de la fonction carrée.*

III) LIMITE EN a (avec a réel)

Lorsque l'on définit la limite d'une fonction f en un réel a, on considère que :
- $a \in D_f$ *ou*
- a est une borne de D_f

1) Limite infinie en a et ASYMPTOTE VERTICALE

DEFINITION

Soit f une fonction.

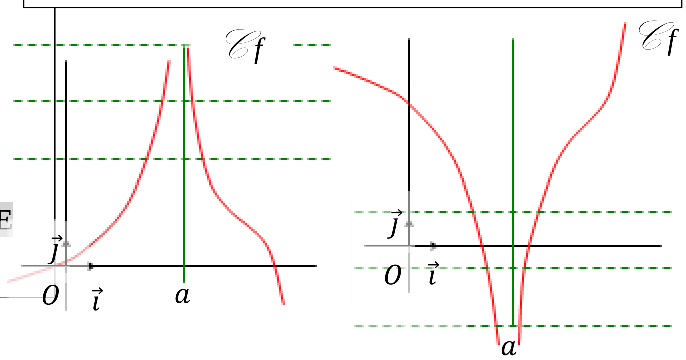
• **Si** « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a »**, alors on dit que f a pour limite $+\infty$ en a.**

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

On définit de la même façon : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

• **On dit que la droite** d'équation $x = a$ **est ASYMPTOTE VERTICALE à la courbe** $\mathscr{C}f$.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, la courbe $\mathscr{C}f$ finit par se situer au-dessus (et en dessous) pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale.



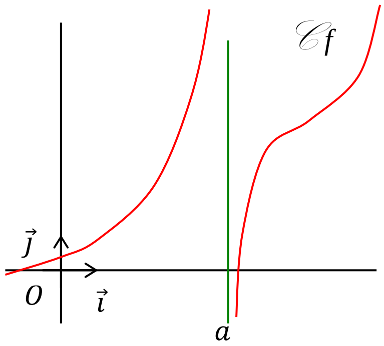
Remarque

Il arrive souvent qu'on soit amené à définir les limites « d'un seul côté de a ». De manière plus mathématique, cela signifie que la restriction de f à $]a\,;c]$ et la restriction de f à $[b\,;a[$ n'admettent pas la même limite en a. Naturellement, on introduit les notions de** <u>limite à gauche</u> **en a et de** <u>limite à droite</u> **en a et on note :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

Exemples

•



Dans cet exemple :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \qquad ; \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) =$$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} =$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} =$ • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$ • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^2} =$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2}$

$=$

• $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} =$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} =$ *si n pair* *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} =$ *si n impair*

Les courbes représentants ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

2) <u>Limite finie en a</u>

On a déjà vu la notion de limite finie en zéro, dans le chapitre sur la dérivation en 1ère S. La notion de limite finie en a est identique.

Remarque

On admet que si une fonction f est définie en a et si f admet une limite finie en a, alors $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

On dit alors que la fonction f est CONTINUE en a. (*on en reparlera un peu plus tard….*)

C'est le cas en tout point de l'ensemble de définition des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée… et des composées de ces fonctions (*on en reparlera également plus tard….***).**

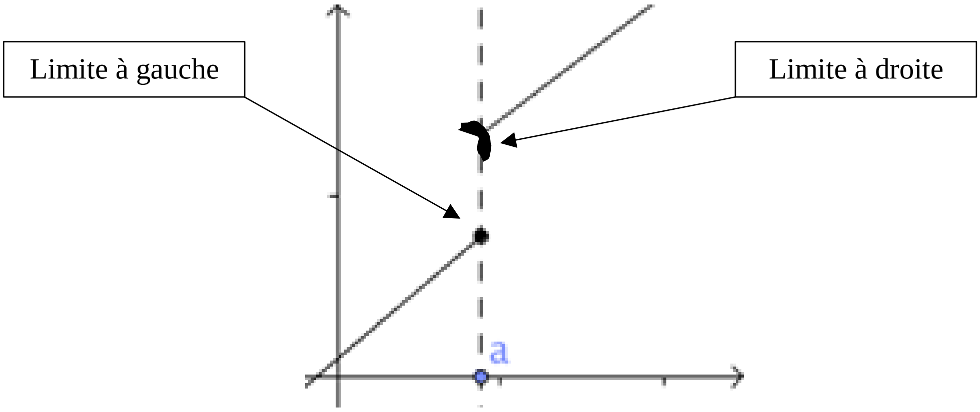
Cette remarque nous permet de déterminer rapidement la limite d'une telle fonction en tout point de son ensemble de définition.

Exemples

$$\lim_{x\to 3} \mathbf{sin}(\mathbf{3}x+\mathbf{4}) = \qquad\qquad \lim_{x\to 4} \sqrt{x^2+3} =$$

Attention

Toutes les fonctions n'admettent pas forcément UNE limite finie en tout point de l'ensemble de définition (*la limite à droite et la limite à gauche peuvent être différentes…*)



IV) OPERATIONS SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableau sont admis. Pour la plupart d'entre eux, ils sont naturels mais… comme souvent en mathématiques, il y a quelques cas particuliers.

Par convention et pour simplifier :

- on note $\lim f$ et $\lim g$, les limites de f et de g, toutes les deux en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$.
- on note par un point d'interrogation(?) les cas où il n'y a pas de conclusion générale.

On dit qu'il s'agit de FORMES INDETERMINEES. *Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.*

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(f(x)+g(x)\right) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(f(x)g(x)\right) =$	$L\,L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$? $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5) =$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+x^2) =$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2) =$

Remarque

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty-\infty",\ "0\times\infty",\ "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

EXERCICES

Méthode 1 : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^3+2x^2-6x+1\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+2}{4x-1}$

Méthode 2 : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

Méthode 3 : Déterminer une asymptote

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\}$ **par** $f(x)=\dfrac{3x+1}{2-x}$

Démontrer que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$

2) Soit $\boldsymbol{g}$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ 4 \}$ **par** $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{4}}$.

Démontrer que la droite d'équation $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de $\boldsymbol{g}$.

A VOUS DE JOUER

Calculer les limites suivantes **:**

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \left(12 + \frac{3}{x-2}\right) \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} (x^2 - x + 3) \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+5}{x-1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+2}) \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x \to 2} \frac{-x^2+x-1}{(2-x)(x-1)}$$

V) THEOREMES SUR LES LIMITES

1) Limite de fonctions composées

DEFINITION

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F et g définie sur l'ensemble F.

La fonction notée $\boldsymbol{g \circ f}$ et définie pour tout $\boldsymbol{x}$ de E par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

est appelée COMPOSEE DE $\boldsymbol{f}$ SUIVIE DE $\boldsymbol{g}$

$$\xrightarrow{\quad g \circ f \quad}$$

$$\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$

Exemple

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ **:**

$$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}^2 \qquad \boldsymbol{et} \qquad \boldsymbol{g} : \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x} + \mathbf{3}$$

- $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) =$

- $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) =$

Remarque

En règle générale, on a :

$$f \circ g \neq g \circ f$$

THEOREME

Soit deux fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$. Soient $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{c}$ des réels ou $+\infty$ $\boldsymbol{ou}$ $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ $\quad et \quad$ $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ $\quad$ alors $\quad$ $\lim\limits_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c$

Exemple

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\mathbf{3} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}$ ***et*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1}}\right)$

THEOREME

f, g et h sont trois fonctions définies sur l'intervalle $I =]b\,;\ +\infty[$ et l un réel.

1) **THEOREME DE COMPARAISON**
   Si pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \geq g(x)$
   et si : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ **alors** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) **THEOREME DES « GENDARMES »**
   Si pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
   et si : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ **alors** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Remarque

Énoncés analogues en $-\infty$ avec $I =]-\infty\,;\ b[$ et en un réel a avec I un intervalle ouvert contenant a.

DEMONSTRATIONS

1) D'après la définition des limites, tout intervalle ouvert $]M\,;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand.
   Comme $f(x) \geq g(x)$ il en est de même pour $f(x)$.
   Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$.
   D'après la définition des limites, tout intervalle ouvert J contenant l, contient toutes les valeurs de $g(x)$ et $h(x)$ pour x assez grand. Comme **:** $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, il en est de même pour $f(x)$.
   Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

EXERCICES

1) Déterminer la limite de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ en $+\infty$.

2) Déterminer la limite de $g(x) = x + \cos x$ en $+\infty$.

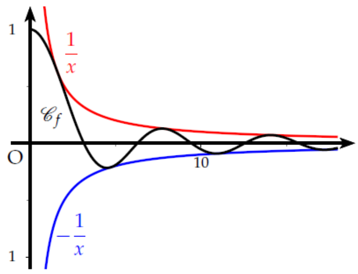
Reponses

1) Pour tout x positif, on a :
$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc :

$$\forall x > 0 \quad -\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

or on sait que :
$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
D'après le théorème des Gendarmes, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

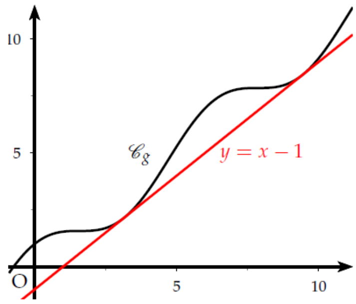


2) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x \geqslant -1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \cos x \geqslant x - 1$$

or on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$



VI) Continuite

1) Définition et propriétés

Definition

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. On dit que la fonction f est **continue en a** si et seulement si :

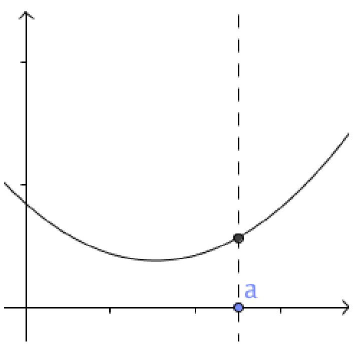
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La fonction f est continue sur un intervalle I si et seulement si f est **continue en tout point** de I.

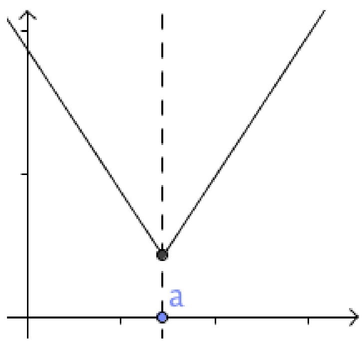
Remarque

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en « un seul morceau ».

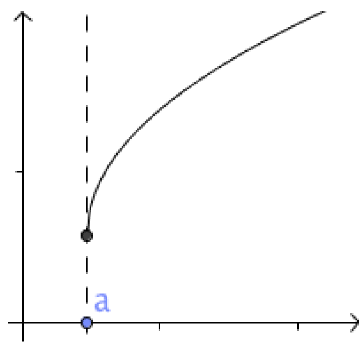
Exemples et contre-exemples



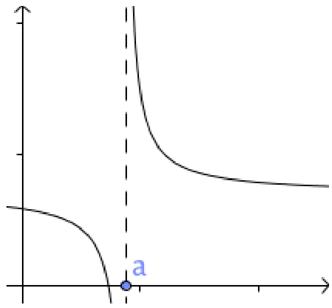
***f* est continue en a**



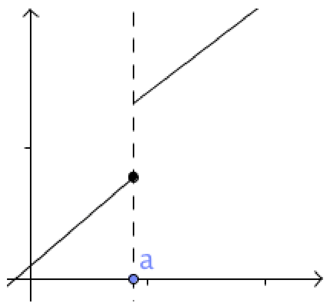
***f* est continue en a**



***f* est continue en a**



***f* n'est pas continue en a**



***f* n'est pas continue en a**

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

PROPRIETE ADMISE

• Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

• La fonction inverse est continue sur $]-\infty\,;0[$ *et sur* $]0\,;\,+\infty[$.

• La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

• La fonction racine carrée est continue sur $[0\,;\,+\infty[$ (et non dérivable en 0…)

• Les fonctions $x \longmapsto \sin x$ *et* $\cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

• D'une façon générale, toutes fonctions construites par opération ou par composition à partir des fonctions ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition, en particulier les fonctions rationnelles.

EXEMPLE DE FONCTION DISCONTINUE : LA FONCTION PARTIE ENTIERE

La partie entière d'un nombre x est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x. On le note $E(x)$.

1) Calculer $E(-1)$; $E(-0{,}6)$; $E(0{,}85)$; $E(0{,}99)$.

2) Représenter graphiquement la fonction E sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction E est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Si non, sur quels intervalles est-elle continue ?

PROPRIETE ADMISE

• Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a.

• Si f est dérivable sur un intervalle I alors la fonction f est continue sur I.

La réciproque de ce théorème est fausse !!!

PENSER A LA FONCTION RACINE CARREE…

2) Théorème des valeurs intermédiaires

THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES ADMIS

> Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $I = [a\,;b]$.
>
> **Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il EXISTE UN REEL $c \in I$ tel que $f(c) = k$.**

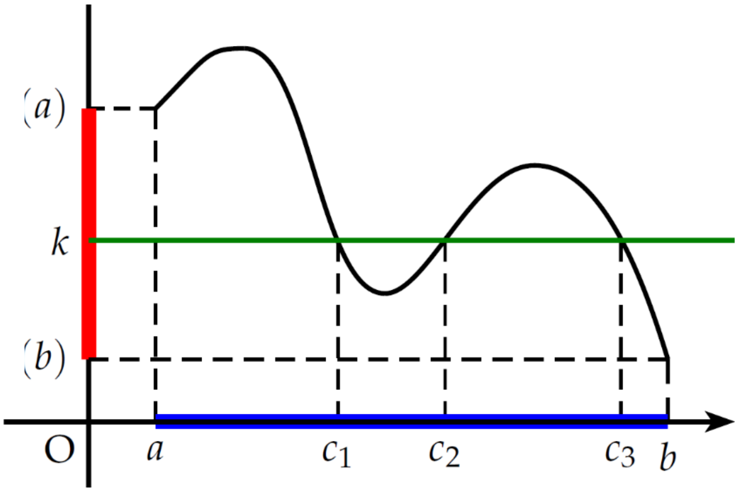
Il faut impérativement que la fonction soit continue…

Illustration Graphique

Ici k est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
L'équation $f(x) = k$ admet donc des solutions.

Le fait que c existe ne veut pas dire qu'il soit unique.

Dans l'exemple, il existe 3 valeurs pour c.



THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES BIS

> Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a\,;b]$.
>
> **Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une UNIQUE SOLUTION dans $I = [a\,;b]$.**

DEMONSTRATION L'existence découle du théorème précédent, et l'unicité de la monotonie de la fonction.

Remarque

- On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert $I =]a\,;b[$. k doit alors être **compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$.**

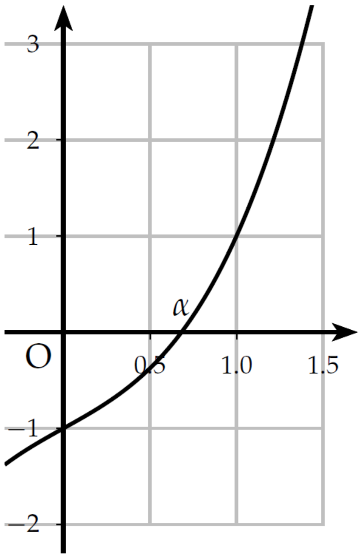
- Lorsque $k = 0$, on pourra montrer que $\boldsymbol{f(a) \times f(b) < 0}$.

- Ce théorème est parfois appelé le **théorème de la bijection** car la fonction réalise une bijection de I sur $f(I)$.

- Un tableau de variation pourra **être suffisant** pour montrer la continuité de la monotonie de la fonction.

Exemple Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution sur $\mathbb{R}$. On donnera un encadrement à l'unité de cette solution. Trouver ensuite, un encadrement à 10^{-6} de cette solution.



REPONSE

La fonction f est une fonction **continue** sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

La fonction f est la somme de deux fonctions croissantes $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto x - 1$, donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1 \implies f(0) \times f(1) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f admet un unique $x_0 \in [0\,;1]$ tel que $f(x_0) = 0$.

$$\mathbf{0,682\,327 \leq x_0 \leq 0,682\,328}$$

VII) DERIVABILITE

1) Rappels

DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

Dire que **f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$**, c'est dire que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \qquad \text{ce qui s'écrit aussi} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Remarque

- Dire que f est dérivable en a, c'est dire que la courbe représentative de f admet au point $A\big(a\,;f(a)\big)$ une *tangente T_A non verticale*.

- Le coefficient directeur de T_A est $\boldsymbol{f'(a)}$.

- Une équation de T_A est $\quad \boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

FORMULES

Fonction	$\mathscr{D}_f$	Dérivée	$\mathscr{D}'_f$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée autre	$[f(ax+b)]' = a \times f'(ax+b)$

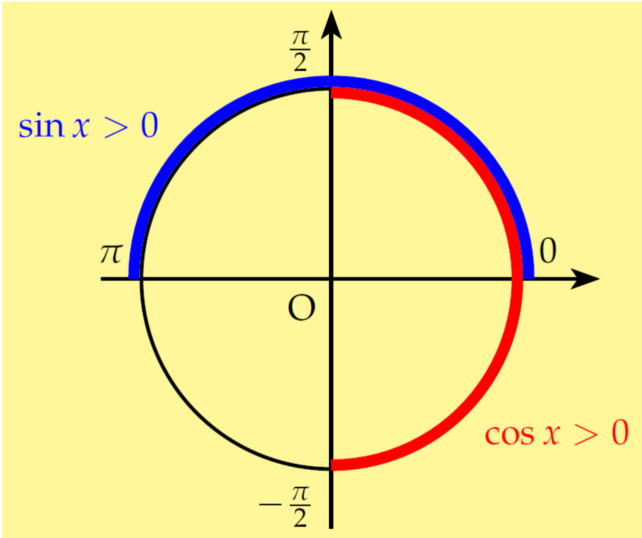
***Les trois dernières règles sont nouvelles*.**

Exemple

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = (3x-2)^4$
- $g(x) = \sqrt{3x^2+5x-3}$
- $h(x) = \sin(4x-5)$

VIII) FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES



DEFINITION

A tout réel x, on associe un point unique M du cercle trigonométrique de centre O dont les coordonnées sont

$$\boldsymbol{M(\cos x\ ;\sin x)}.$$

Les fonctions $x \longmapsto \cos x$ *et* $x \longmapsto \sin x$ *sont ainsi définies sur* $\mathbb{R}$

THEOREME

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$ donc la **fonction cosinus est paire** d'où sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$ donc la **fonction sinus est impaire** d'où sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine du repère.**

THEOREME

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2\,\pi) = \cos x$ donc la **fonction cosinus est périodique de période $2\,\pi$**
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2\,\pi) = \sin x$ donc la **fonction sinus est périodique de période $2\,\pi$**

CONSEQUENCE : on étudiera les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de $2\,\pi$, par exemple : $]-\boldsymbol{\pi}\,;\boldsymbol{\pi}]$

THEOREME

- *Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\boldsymbol{(\sin x)' = \cos x \qquad et \qquad (\cos x)' = -\sin x}$$

THEOREME

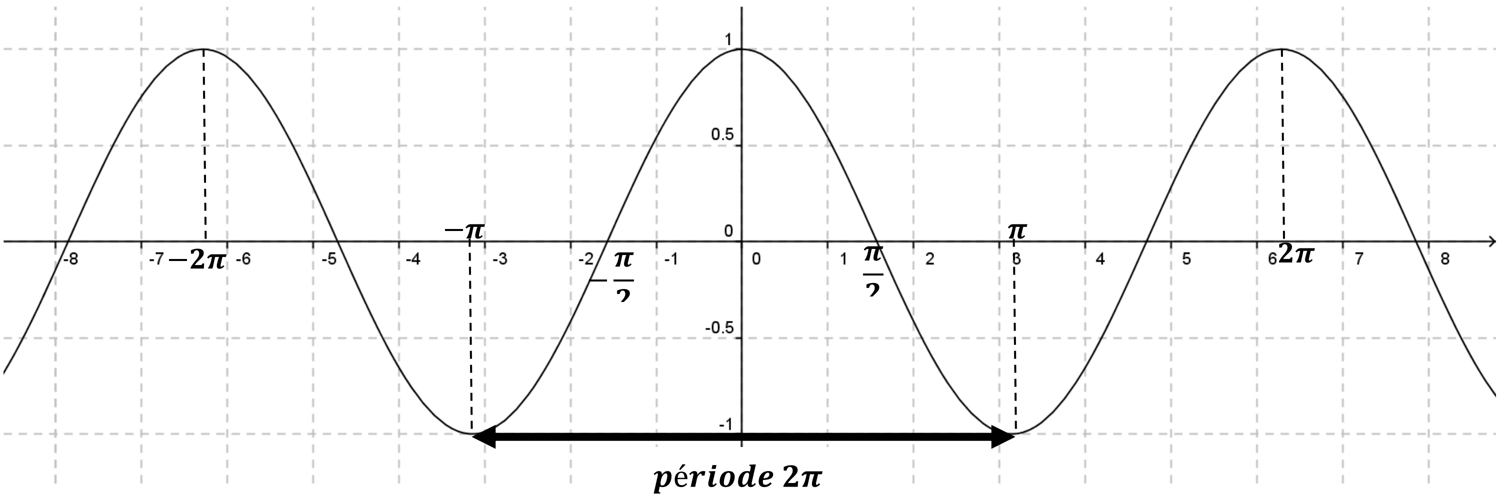
• *D'après les fonctions dérivées des fonctions sinus et cosinus, on a* :

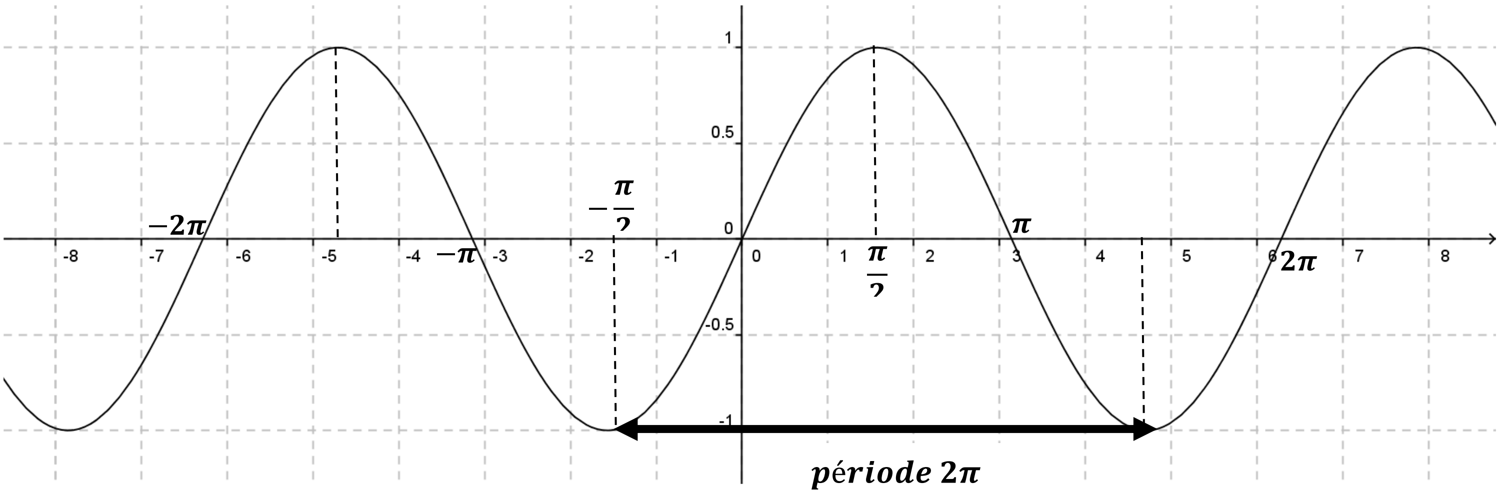
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad et \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

DEMONSTRATION

COURBES REPRESENTATIVES

Fonction Cosinus





EXERCICES : ***Etudier une fonction trigonométrique***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(2\,x) - \frac{1}{2}$$

1) Etudier la parité de f.
2) Démontrer que la fonction f est périodique de période π.
3) Etudier les variations de f.
4) Représenter graphiquement la fonction f.