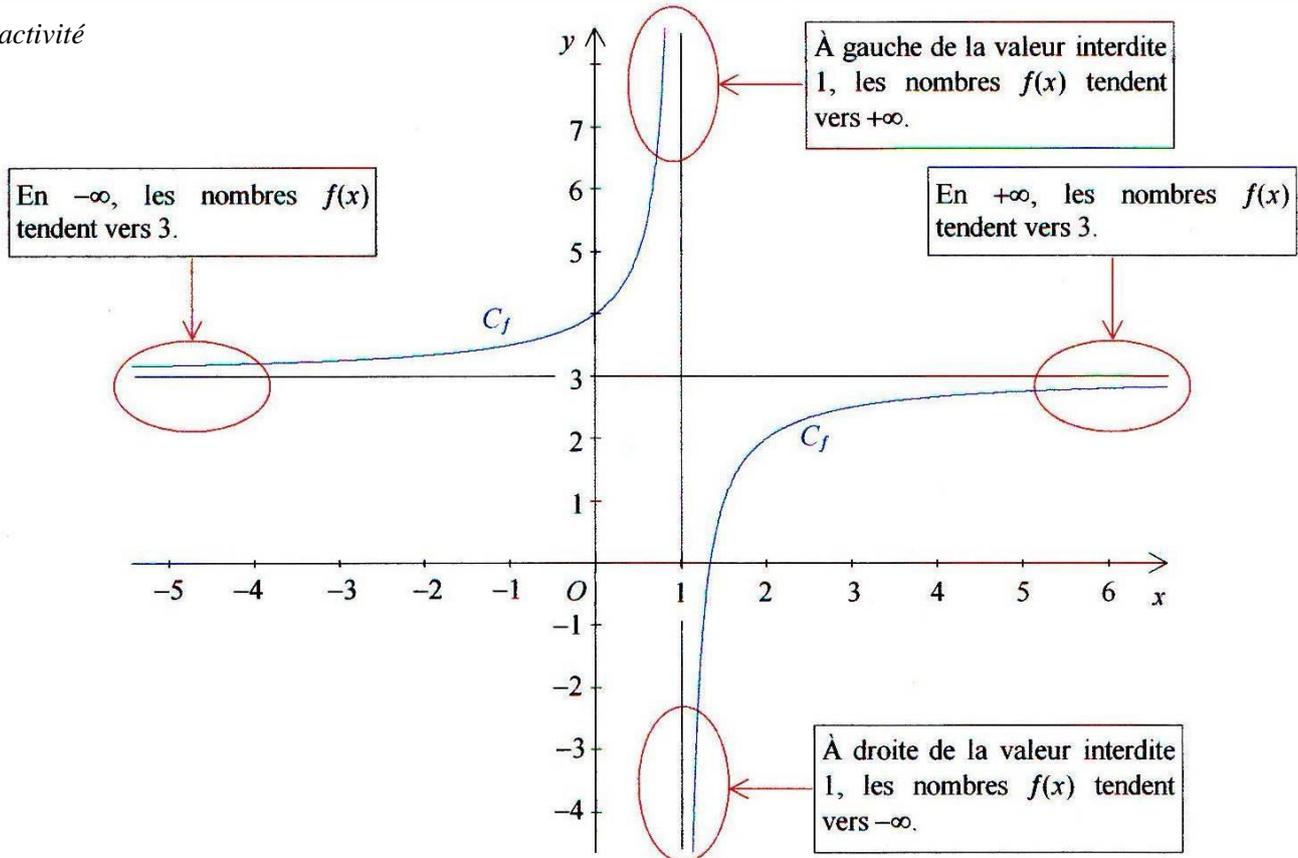


# FONCTIONS : Limites - Continuité - Dérivée - Trigonométrie

## I) PRELIMINAIRES

Voir activité



## II) LIMITE D'UNE FONCTION EN $+\infty$ et $-\infty$

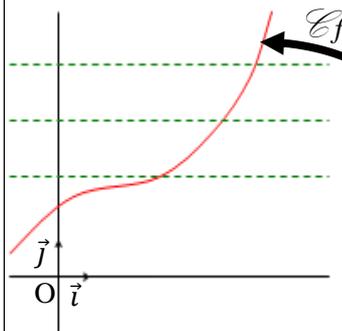
### 1) Limite infinie en $+\infty$ et $-\infty$

#### DEFINITION

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a ; +\infty[$  où  $a$  est un réel.

Si «  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut dès que  $x$  est assez grand », alors on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$ .

**On note**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes, la courbe  $\mathcal{C}_f$  finit par se situer au-dessus de n'importe quelle droite horizontale.

#### REMARQUE :

- De manière plus mathématique : pour tout réel  $M > 0$ , il existe un réel  $m$  tel que, si  $x > m$  alors  $f(x) > M$ .
- On dit aussi que la fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

#### Exemples à connaître :

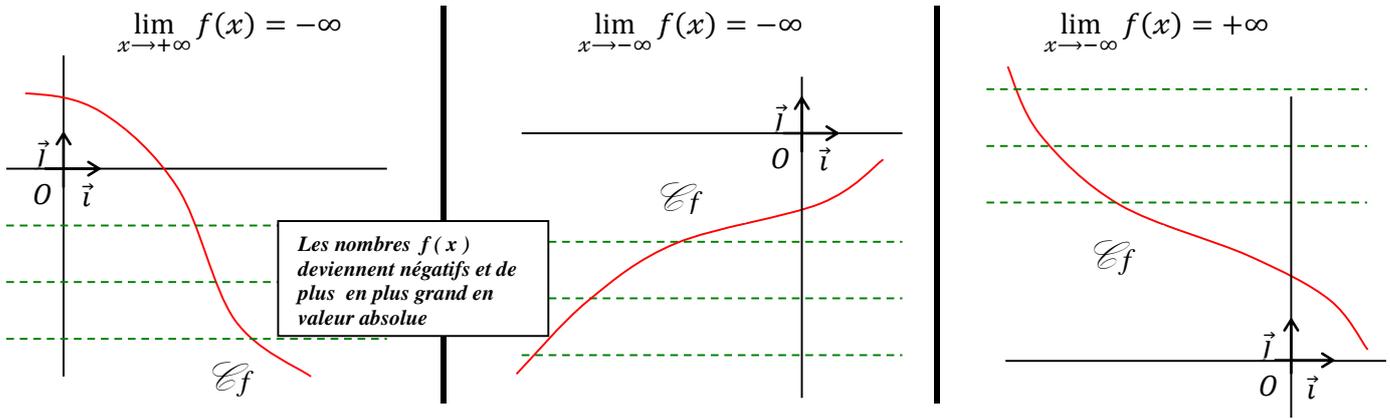
•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x =$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 =$

•  $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n =$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} =$

On définit de la même façon...



Dans ces deux cas,  $f$  est définie sur un intervalle de la forme  $] -\infty; b]$

Exemples à connaître :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x =$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 =$
- $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n =$  si  $n$  est pair  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n =$  si  $n$  est impair

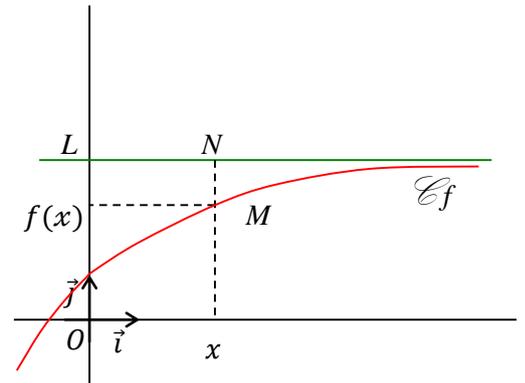
## 2) Limite finie en $+\infty$ et $-\infty$ et ASYMPTOTE HORIZONTALE

### DEFINITION

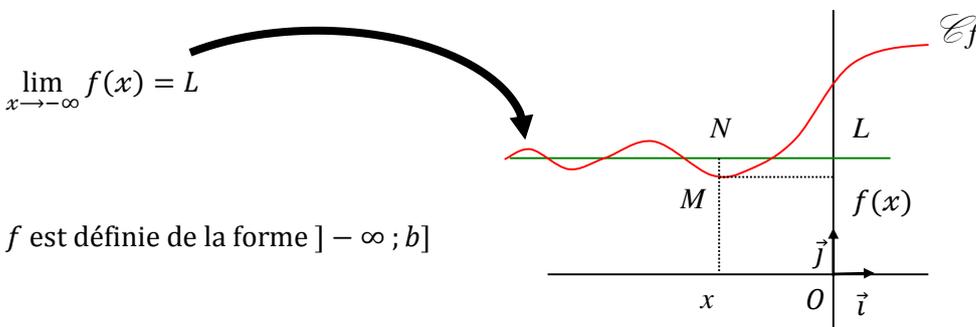
Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a; +\infty[$  où  $a$  est un réel.  $f$  a pour limite le réel  $L$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si les images de  $f(x)$  sont aussi proches que l'on veut de  $L$ , à condition de prendre  $x$  suffisamment grand.

On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

On dit alors que la droite d'équation  $y = L$  est **ASYMPTOTE HORIZONTALE** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .



On définit de la même façon...



La distance  $MN$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .  
La droite d'équation  $y = L$  est **ASYMPTOTE HORIZONTALE** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$ .

Exemples à connaître :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} =$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} =$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} =$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} =$

La courbe représentative de la fonction inverse admet l'axe des abscisses comme asymptote en  $+\infty$ .

## REMARQUE

Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :

par exemple :  $x \mapsto \sin x$  et  $\cos x$

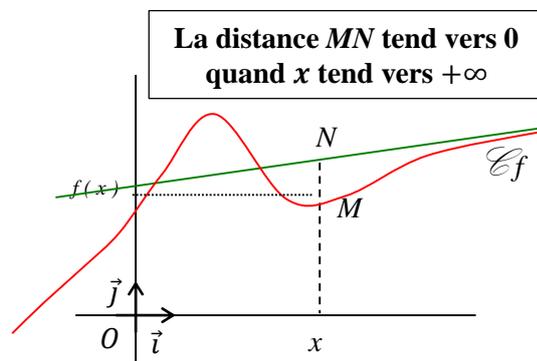
### 3) Asymptote Oblique

#### DEFINITION

Soit  $a$  ( $a \neq 0$ ) et  $b$  deux réels et  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentant une fonction  $f$  dans un repère. Dire que la droite d'équation  $y = ax + b$  est **ASYMPTOTE OBLIQUE** à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) revient à dire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\text{(respectivement } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0)$$



#### REMARQUE

Une fonction peut avoir une limite infinie lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$  sans que sa courbe possède une asymptote : c'est le cas de la fonction carrée.

### III) LIMITE EN $a$ (avec $a$ réel)

Lorsque l'on définit la limite d'une fonction  $f$  en un réel  $a$ , on considère que :

- $a \in D_f$  ou
- $a$  est une borne de  $D_f$

#### 1) Limite infinie en $a$ et ASYMPTOTE VERTICALE

#### DEFINITION

Soit  $f$  une fonction.

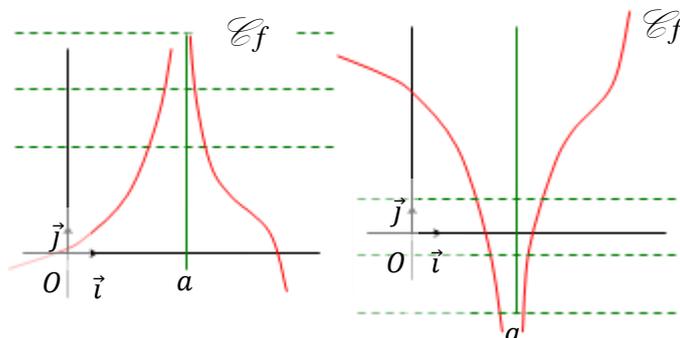
- Si «  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut dès que  $x$  est assez proche de  $a$  », alors on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$ .

On note :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

On définit de la même façon :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

- On dit que la droite d'équation  $x = a$  est **ASYMPTOTE VERTICALE** à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus proches de  $a$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  finit par se situer au-dessus (et en dessous) pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale.

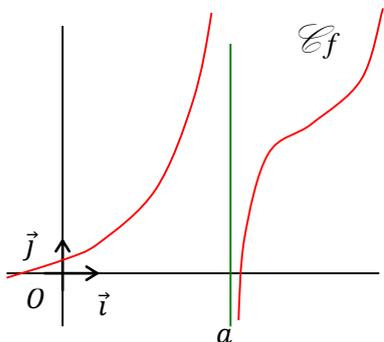


#### REMARQUE

Il arrive souvent qu'on soit amené à définir les limites « d'un seul côté de  $a$  ». De manière plus mathématique, cela signifie que la restriction de  $f$  à  $]a ; c[$  et la restriction de  $f$  à  $]b ; a[$  n'admettent pas la même limite en  $a$ . Naturellement, on introduit les notions de limite à gauche en  $a$  et de limite à droite en  $a$  et on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

## Exemples



Dans cet exemple :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) =$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} =$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} =$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} =$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} =$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} =$
- $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} =$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} =$  si n pair et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} =$  si n impair

Les courbes représentant ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

## 2) Limite finie en a

On a déjà vu la notion de limite finie en zéro, dans le chapitre sur la dérivation en 1<sup>ère</sup> S. La notion de limite finie en a est identique.

### REMARQUE

On admet que si une fonction f est définie en a et si f admet une limite finie en a, alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

On dit alors que la fonction f est **CONTINUE** en a. (on en reparlera un peu plus tard...)

C'est le cas en tout point de l'ensemble de définition des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée... et des composées de ces fonctions (on en reparlera également plus tard...).

Cette remarque nous permet de déterminer rapidement la limite d'une telle fonction en tout point de son ensemble de définition.

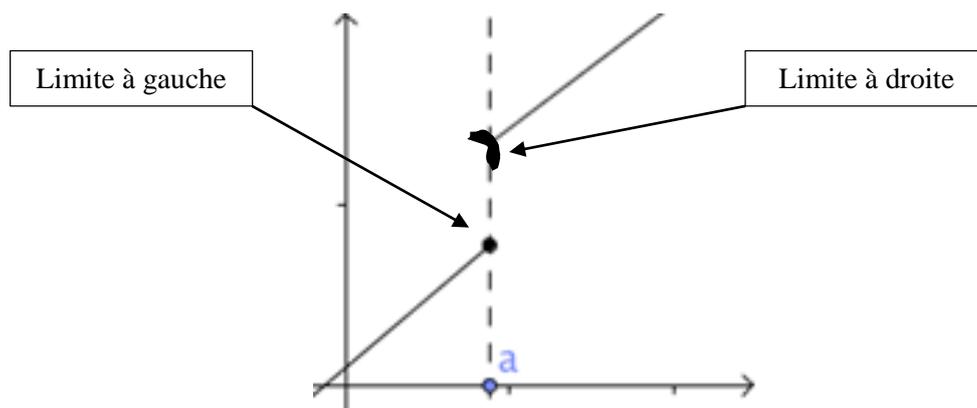
### Exemples

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sin(3x + 4) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 3} =$$

### ATTENTION

Toutes les fonctions n'admettent pas forcément **UNE** limite finie en tout point de l'ensemble de définition (la limite à droite et la limite à gauche peuvent être différentes...)



#### IV) OPERATIONS SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableau sont admis. Pour la plupart d'entre eux, ils sont naturels mais... comme souvent en mathématiques, il y a quelques cas particuliers.

Par convention et pour simplifier :

- on note  $\lim f$  et  $\lim g$ , les limites de  $f$  et de  $g$ , toutes les deux en  $a$ , en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .
- on note par un point d'interrogation (?) les cas où il n'y a pas de conclusion générale.

On dit qu'il s'agit de **FORMES INDETERMINEES**. Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

$\alpha$  peut désigner  $+\infty$ ,  $-\infty$  ou un nombre réel.

##### 1) Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	$L$	$L$	$L$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

##### 2) Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	$L$	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$L'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x)g(x)) =$	$LL'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

##### 3) Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	$L$	$L$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) < 0$	0	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

#### Exemple

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5)(3 + x^2)$  ?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5) = \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 + x^2) =$$

D'après la règle sur la limite d'un produit :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5)(3 + x^2) =$

### **Remarque**

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$" \infty - \infty ", " 0 \times \infty ", " \frac{\infty}{\infty } " \text{ et } " \frac{0}{0 } " .$$

### **EXERCICES**

#### **Méthode 1 : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles**

Calculer : 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1)$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$       3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1}$

#### **Méthode 2 : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux**

Calculer : 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$       2)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$

#### **Méthode 3 : Déterminer une asymptote**

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$  par  $f(x) = \frac{3x+1}{2-x}$

Démontrer que la droite d'équation  $y = -3$  est asymptote horizontale à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{ 4 \}$  par  $f(x) = \frac{2x}{x-4}$ .

Démontrer que la droite d'équation  $x = 4$  est asymptote verticale à la courbe représentative de  $g$ .

### **A VOUS DE JOUER**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left( 12 + \frac{3}{x-2} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 3) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+2}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + x - 1}{(2-x)(x-1)}$$

V) THEOREMES SUR LES LIMITES

1) Limite de fonctions composées

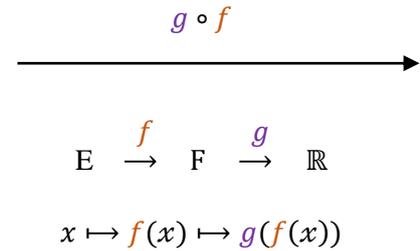
**DEFINITION**

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $E$  à valeurs dans un ensemble  $F$  et  $g$  définie sur l'ensemble  $F$ .

La fonction notée  $g \circ f$  et définie pour tout  $x$  de  $E$  par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

est appelée **COMPOSEE DE  $f$  SUIVIE DE  $g$**



**Exemple**

Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  :

$$f : x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x + 3$$

•  $(g \circ f)(x) =$

•  $(f \circ g)(x) =$

**Remarque**

En règle générale, on a :

$$f \circ g \neq g \circ f$$

**THEOREME**

Soit deux fonctions  $f$  et  $g$ . Soient  $a, b$  et  $c$  des réels ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$

**Exemple**

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3 + \frac{2}{x^2}} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{3}{4x^2 + 1}\right)$$

**THEOREME**

$f, g$  et  $h$  sont trois fonctions définies sur l'intervalle  $I = ]b ; +\infty[$  et  $l$  un réel.

1) **THEOREME DE COMPARAISON**  
 Si pour tout  $x \in I$ , on a :  $f(x) \geq g(x)$   
 et si :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2) **THEOREME DES « GENDARMES »**  
 Si pour tout  $x \in I$ , on a :  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$   
 et si :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

### Remarque

Énoncés analogues en  $-\infty$  avec  $I = ]-\infty ; b[$  et en un réel  $a$  avec  $I$  un intervalle ouvert contenant  $a$ .

### DEMONSTRATIONS

### EXERCICES

1) Déterminer la limite de  $f(x) = x + \cos x$  en  $+\infty$ .

2) Déterminer la limite de  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$  en  $+\infty$ .

### REPONSES

1) Pour tout  $x$  positif, on a :

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \text{donc :}$$

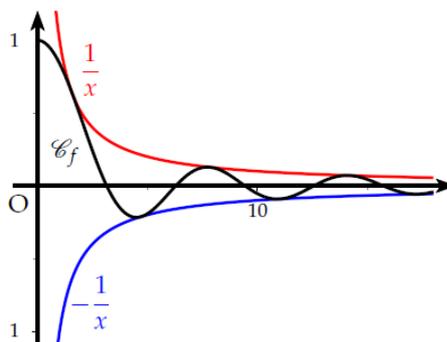
$$\forall x > 0 \quad -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

D'après le théorème des Gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

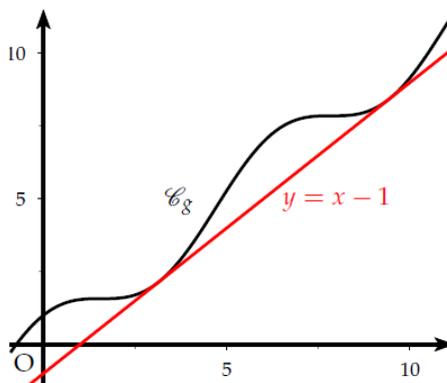


2) On a :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x \geq -1$ , donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \cos x \geq x - 1$$

or on sait que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ ,  
donc d'après le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$



## VI) CONTINUITÉ

### 1) Définition et propriétés

#### DEFINITION

Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle ouvert  $I$ . Soit  $a$  un élément de  $I$ . On dit que la fonction  $f$  est **continue en  $a$**  si et seulement si :

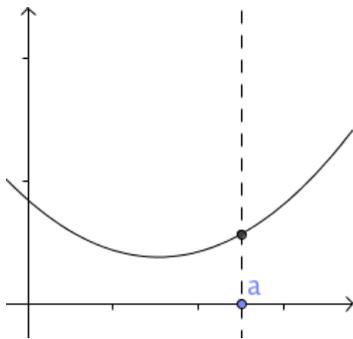
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

La fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  si et seulement si  $f$  est **continue en tout point** de  $I$ .

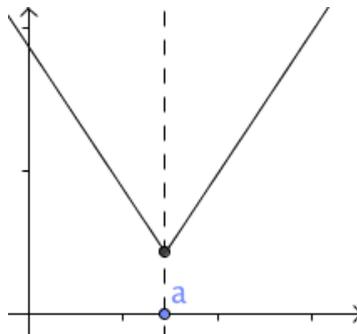
#### Remarque

Graphiquement, la continuité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  se traduit par une courbe en « un seul morceau ».

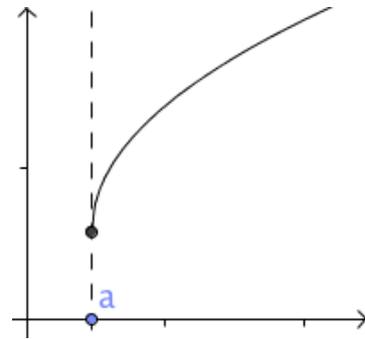
#### Exemples et contre-exemples



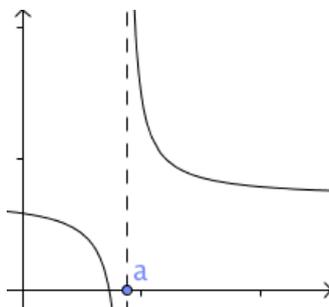
$f$  est continue en  $a$



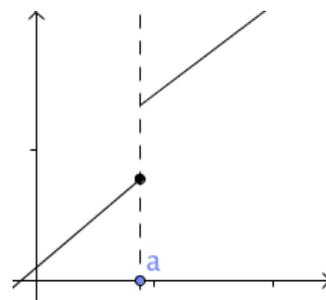
$f$  est continue en  $a$



$f$  est continue en  $a$



$f$  n'est pas continue en  $a$



$f$  n'est pas continue en  $a$

*La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.*

#### PROPRIÉTÉ ADMISE

- Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction inverse est continue sur  $] -\infty ; 0[$  et sur  $]0 ; +\infty[$ .
- La fonction valeur absolue est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction racine carrée est continue sur  $[0 ; +\infty[$  (et non dérivable en  $0\dots$ )
- Les fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $\cos x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- D'une façon générale, toutes fonctions construites par opération ou par composition à partir des fonctions ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition, en particulier les fonctions rationnelles.

## EXEMPLE DE FONCTION DISCONTINUE : LA FONCTION PARTIE ENTIERE

La partie entière d'un nombre  $x$  est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à  $x$ . On le note  $E(x)$ .

- 1) Calculer  $E(-1)$  ;  $E(-0,6)$  ;  $E(0,85)$  ;  $E(0,99)$ .
- 2) Représenter graphiquement la fonction  $E$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) La fonction  $E$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ? Si non, sur quels intervalles est-elle continue ?

## PROPRIETE ADMISE

- Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors la fonction  $f$  est continue en  $a$ .
- Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $f$  est continue sur  $I$ .



**La réciproque de ce théorème est fausse !!!**

PENSER A LA FONCTION RACINE CARREE...

## 2) Théorème des valeurs intermédiaires

### THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES ADMIS

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $I = [a ; b]$ .

**Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un réel  $c \in I$  tel que  $f(c) = k$ .**

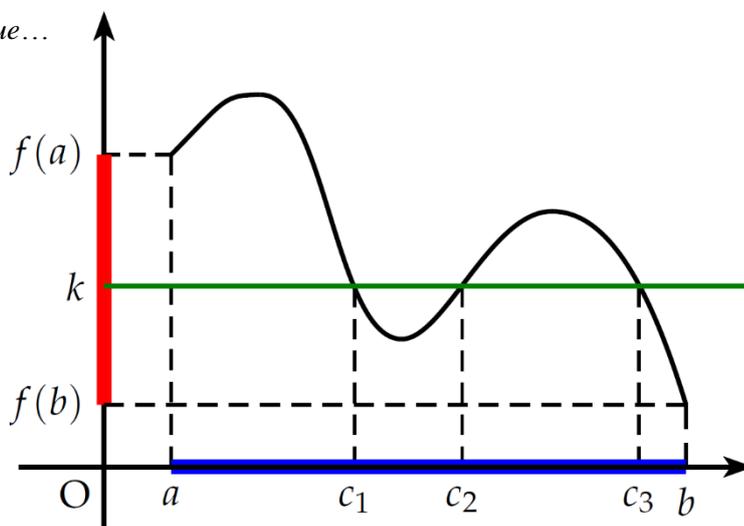
Il faut impérativement que la fonction soit continue...

### Illustration Graphique

Ici  $k$  est bien compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .  
L'équation  $f(x) = k$  admet donc des solutions.

Le fait que  $c$  existe ne veut pas dire qu'il soit unique.

Dans l'exemple, il existe 3 valeurs pour  $c$ .



### THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES BIS

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I = [a ; b]$ .

**Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  a une UNIQUE SOLUTION dans  $I = [a ; b]$ .**

### DEMONSTRATION

L'existence découle du théorème précédent, et l'unicité de la monotonie de la fonction.

### Remarque

- On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert  $I = ]a ; b[$ .  $k$  doit alors être **compris entre**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ .
- Lorsque  $k = 0$ , on pourra montrer que  $f(a) \times f(b) < 0$ .
- Ce théorème est parfois appelé le **théorème de la bijection** car la fonction réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ .
- Un tableau de variation pourra **être suffisant** pour montrer la continuité de la monotonie de la fonction.

### Exemple

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 + x - 1$ .

Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  n'admet qu'une solution sur  $\mathbb{R}$ . On donnera un encadrement à l'unité de cette solution. Trouver ensuite, un encadrement à  $10^{-6}$  de cette solution.

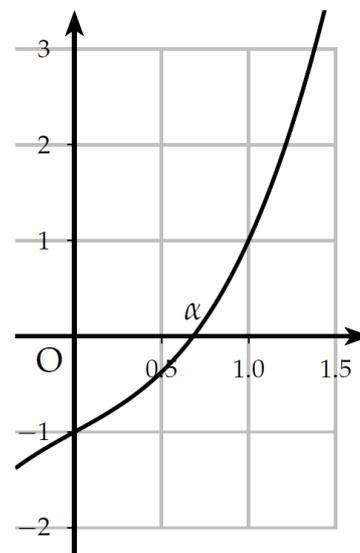
### REPONSE

La fonction  $f$  est une fonction **continue** sur  $\mathbb{R}$  car  $f$  est un polynôme.

La fonction  $f$  est la somme de deux fonctions croissantes  $x \mapsto x^3$  et  $x \mapsto x - 1$ , donc  $f$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $f(0) = -1$  et  $f(1) = 1 \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$ , donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction  $f$  admet un unique  $x_0 \in [0 ; 1]$  tel que  $f(x_0) = 0$ .

$$0,682\,327 \leq x_0 \leq 0,682\,328$$



## VII) DERIVABILITE

### 1) Rappels

#### DEFINITION

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant  $a$ .

Dire que  $f$  est **dérivable en  $a$  de nombre dérivé  $f'(a)$** , c'est dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{ce qui s'écrit aussi} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

### Remarque

- Dire que  $f$  est dérivable en  $a$ , c'est dire que la courbe représentative de  $f$  admet au point  $A(a ; f(a))$  une **tangente  $T_A$  non verticale**.
- Le coefficient directeur de  $T_A$  est  **$f'(a)$** .
- Une équation de  $T_A$  est  **$y = f'(a)(x - a) + f(a)$**

## FORMULES

Fonction	$\mathcal{D}_f$	Dérivée	$\mathcal{D}'_f$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Dérivée de la somme	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée autre	$[f(ax + b)]' = a \times f'(ax + b)$

*Les trois dernières règles sont nouvelles.*

## Exemple

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\bullet f(x) = (3x - 2)^4$$

$$\bullet g(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 3}$$

$$\bullet h(x) = \sin(4x - 5)$$

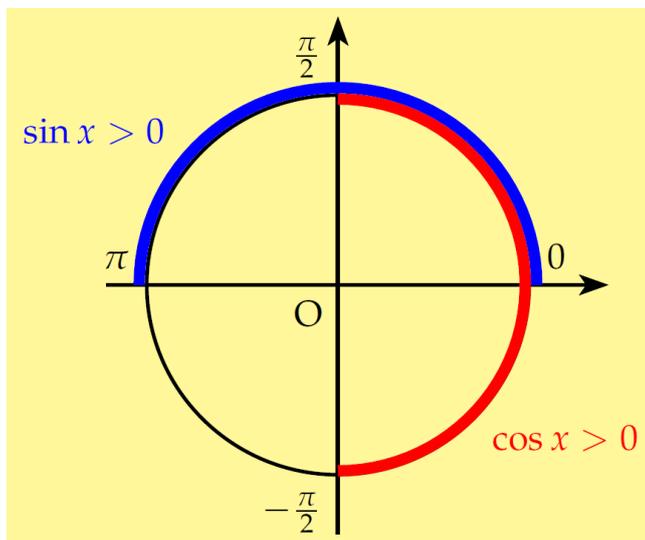
## VIII) FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

### DEFINITION

A tout réel  $x$ , on associe un point unique  $M$  du cercle trigonométrique de centre  $O$  dont les coordonnées sont

$$M(\cos x ; \sin x).$$

Les fonctions  $x \mapsto \cos x$  et  $x \mapsto \sin x$  sont ainsi définies sur  $\mathbb{R}$



### THEOREME

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$  donc la **fonction cosinus est paire** d'où sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$  donc la **fonction sinus est impaire** d'où sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

### THEOREME

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos x$  donc la **fonction cosinus est périodique de période  $2\pi$**
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin x$  donc la **fonction sinus est périodique de période  $2\pi$**

**CONSEQUENCE** : on étudiera les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de  $2\pi$ , par exemple :  $]-\pi ; \pi]$

### THEOREME

- Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et on a

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{et} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

### THEOREME

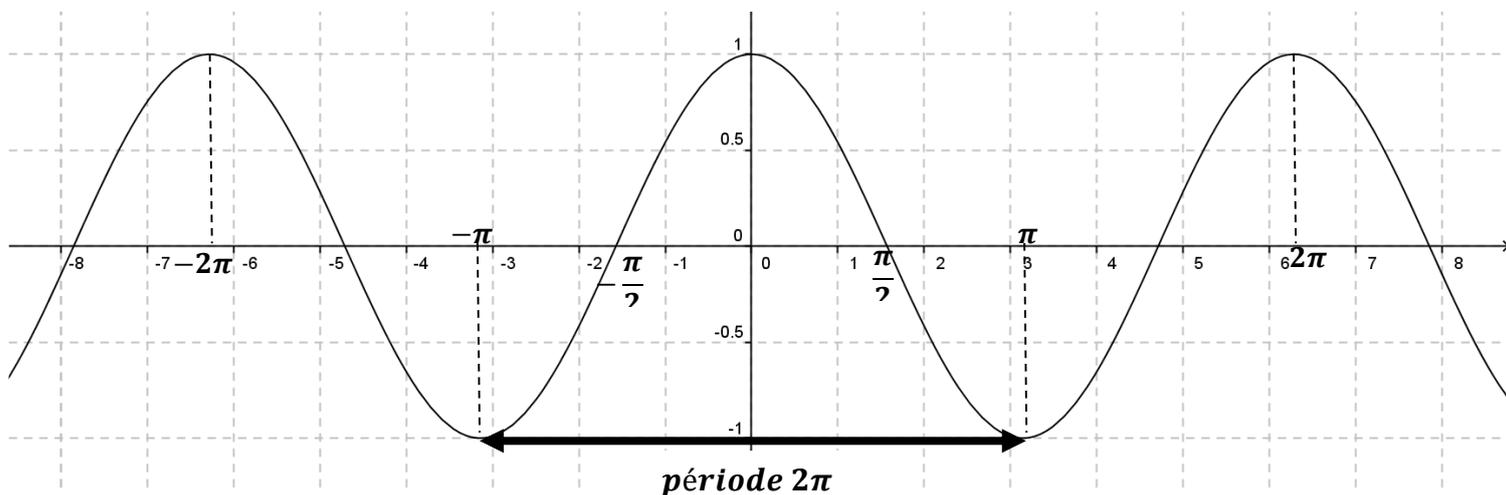
- D'après les fonctions dérivées des fonctions sinus et cosinus, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

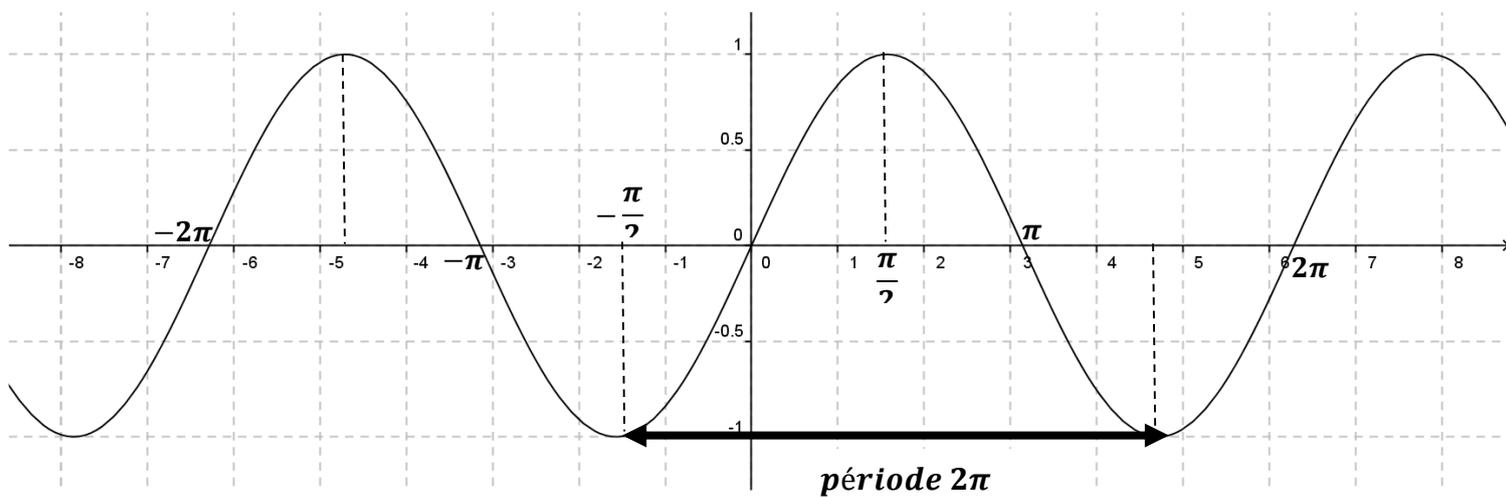
## DEMONSTRATION

## COURBES REPRESENTATIVES

### Fonction Cosinus



### Fonction Sinus



**EXERCICES** : *Etudier une fonction trigonométrique*

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$$

- 1) Etudier la parité de  $f$ .
- 2) Démontrer que la fonction  $f$  est périodique de période  $\pi$ .
- 3) Etudier les variations de  $f$ .
- 4) Représenter graphiquement la fonction  $f$ .