FONCTION EXPONENTIELLE ET FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I) FONCTION EXPONENTIELLE

Le but de ce chapitre est de construire une des fonctions mathématiques les plus importantes. Elle est en effet présente dans toutes les sciences. Sa construction à partir d'une équation différentielle (**équation où intervient la dérivée d'une fonction**) est passionnante (si si je vous assure…), bien qu'historiquement elle ne se soit pas construite ainsi.

1) Définition

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1$$

On nomme cette **FONCTION EXPONENTIELLE** et on la note : **exp. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.**

DEMONSTRATION

L'existence est admise et l'unicité a été faite en activité d'introduction**. Cette démonstration fait partie des ROC…**

2) Relation fonctionnelle

Soient a et b deux réels, on a alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

DEMONSTRATION

REMARQUE

Cette relation s'appelle la relation fonctionnelle car on pourrait définir l'exponentielle à partir de cette propriété pour retrouver les deux relations $f' = f$ et $f(0) = 1$.

PROPRIETES

Soient a et b deux réels et n un entier naturel, on a alors les relations suivantes :

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \qquad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(n\,a) = [\exp(a)]^n$$

DEMONSTRATIONS

- $\exp(-a) \times \exp(a) = \exp(-a+a) = \exp(0) = 1$ par définition, d'où l'égalité $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \dfrac{1}{\exp(b)} = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- Utiliser le raisonnement par récurrence……

NOTATIONS

- L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée $\boldsymbol{e}$, ainsi $\mathbf{exp(1)} = \boldsymbol{e}$. $\boldsymbol{e \approx 2,718\,28}$

- On a donc $\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e^x}$

(*la fonction exponentielle possède les mêmes propriétés algébriques que les fonctions puissances*)

- On obtient donc les ***propriétés suivantes* :**

$\longrightarrow\ \boldsymbol{e^{a+b} = e^a \times e^b}$ $\longrightarrow\ \boldsymbol{e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}}$ $\longrightarrow\ \boldsymbol{e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}}$ $\longrightarrow\ \boldsymbol{e^{n\,a} = (e^a)^n}$

3) Etude de la fonction exponentielle

A) SIGNE

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

DEMONSTRATION

Fait en activité….

B) VARIATION

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

DEMONSTRATION

Evident, puisque sa dérivée est elle-même, autrement dit $\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$ et l'exponentielle est strictement positive.

De la monotonie, on peut en déduire les règles suivantes :

Soient a et b deux réels, on a les équivalences suivantes :

$\boldsymbol{e^a = 1 \iff a = 0}$ $\boldsymbol{e^a > 1 \iff a > 0}$

$\boldsymbol{e^a = e^b \iff a = b}$ $\boldsymbol{e^a < e^b \iff a < b}$

EXERCICES

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ puis l'inéquation $e^{3x} \leq e^{x+6}$

REPONSES

C) LIMITES

THEOREME

On a les limites suivantes :	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	*et*	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

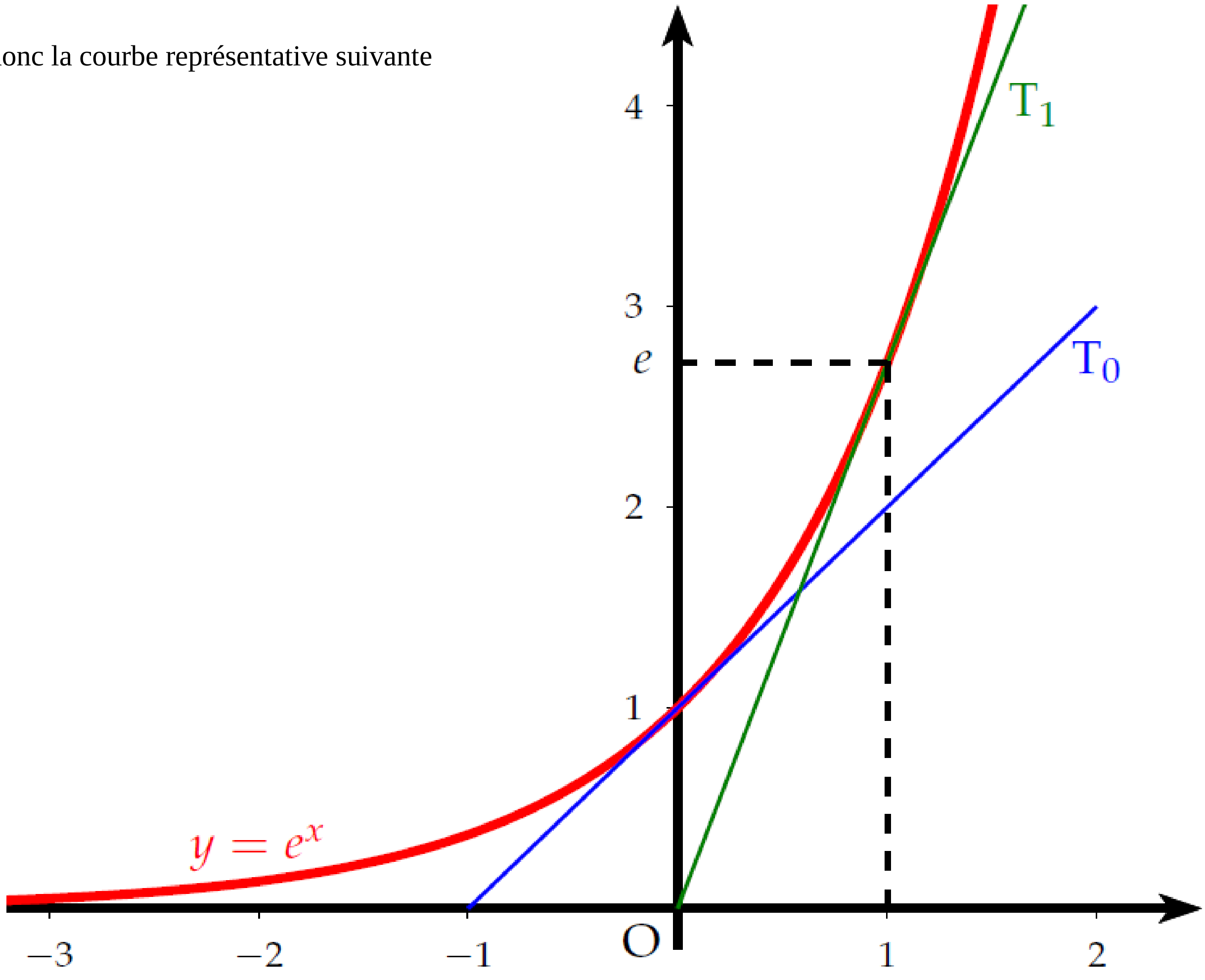
DEMONSTRATION **ROC**

D) COURBE REPRESENTATIVE

D'après tous les renseignements précédents, on a :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $exp'(x)$				$+$			
variation de exp	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

On a donc la courbe représentative suivante



E) AUTRES LIMITES

THEOREME

On a la limite :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

DEMONSTRATION

THEOREME : CROISSANCE COMPAREE

Et on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad et \qquad \lim_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$$

DEMONSTRATION : COMME POUR LES AUTRES DEMONSTRATIONS, ON ETUDIE LES VARIATIONS D'UNE FONCTION !

CONSEQUENCE

A l'infini, la fonction exponentielle « ***l'emporte*** » sur la fonction $x \longmapsto x$.

4) Exercice

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2\, e^x - 3}{e^x + 1}$$

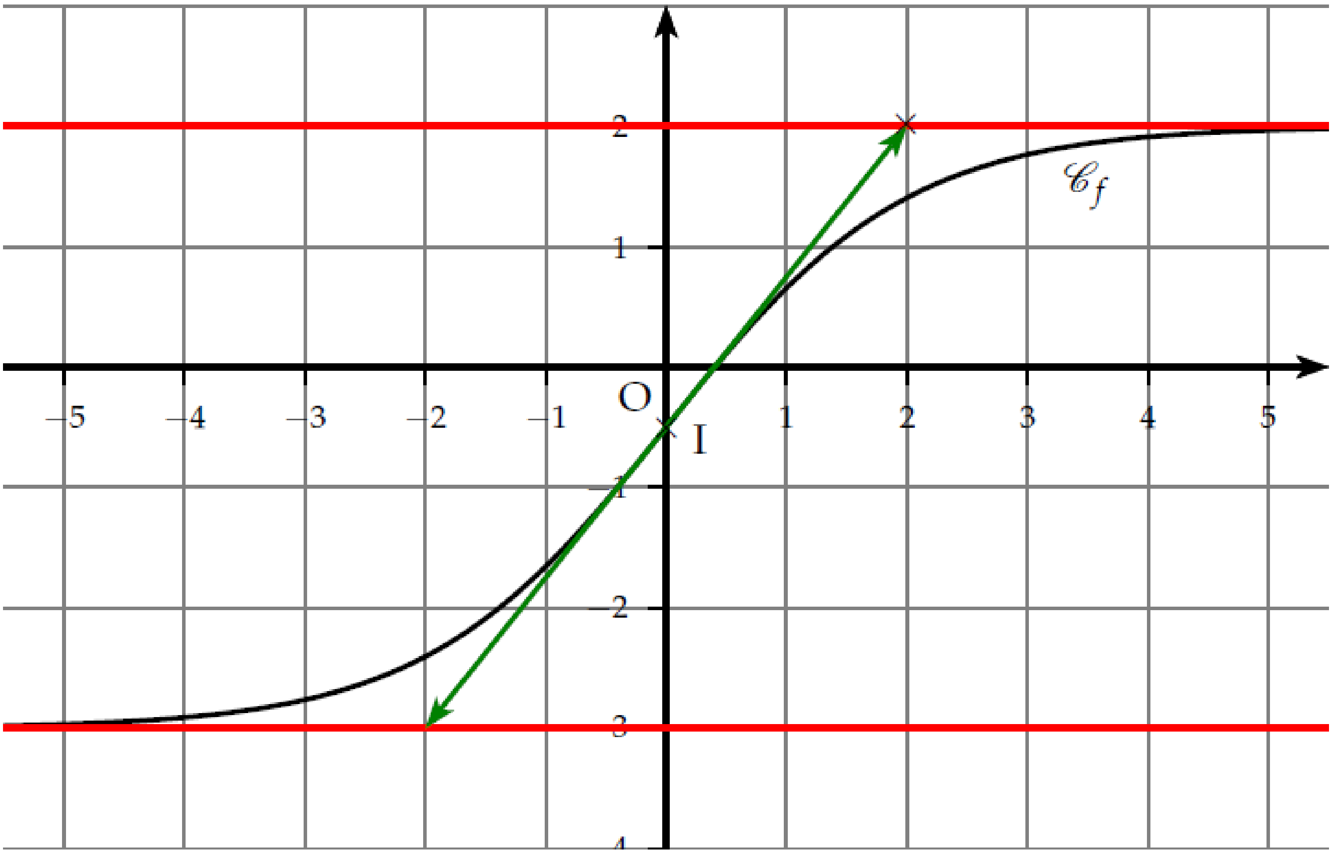
1) Pourquoi les droites d et Δ d'équations respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}_f$?

2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.

3) Tracer d, Δ et $\mathscr{C}_f$.

REPONSES

D'où la courbe suivante :



REMARQUE

Soit une fonction u définie et dérivable sur un ensemble D, alors la fonction $exp(u)$ est dérivable sur D.

D'une manière générale, on a : $\boldsymbol{(e^u)' = u'e^u}$

EXEMPLES

Dériver les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = e^{(2x+1)}$ $\quad$ $g(x) = 5\,x\,e^{3x^2-1}$ $\quad$ $h(x) = \dfrac{e^{3x+1}}{e^{3x}+1}$

II) FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

La création de la FONCTION LOGARITHME NEPERIEN est, à l'origine, antérieure à la fonction exponentielle bien que dans notre progression elle suive l'étude de la fonction exponentielle. La fonction logarithme a été créée par un drapier écossais du XVII^ème^ siècle. Ce drapier, Néper, cherche une fonction pour simplifier les longs calculs des astronomes, des navigateurs et des financiers. Il crée alors une fonction qui transforme le produit en somme. C'est à dire que $f\,(a\,b) = f\,(a) + f\,(b)$. Il a ensuite passé trente ans de sa vie à créer une table dite « de logarithmes » qui permettait d'effectuer les conversions nécessaires.
Mais nous allons définir cette fonction logarithme à partir de la fonction exponentielle : c'est une belle transition.

1) Définition

DEFINITION

On appelle **FONCTION LOGARITHME NEPERIEN** notée ln, la fonction définie de $]0\,;\,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\boldsymbol{x = e^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln x}$$

On dit que la fonction ln est la **FONCTION RECIPROQUE** de la fonction exponentielle.

REMARQUE

- Cette fonction existe bien car la fonction exponentielle est une fonction continue, strictement croissante à valeurs dans $]0\,;\,+\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x = e^y$ d'inconnue y avec $x \in\ ]0\,;\,+\infty[$ admet une unique solution que l'on appelle $\ln x$.
- La fonction ln est **continue sur** $]\mathbf{0}\,;\,+\infty[$.
- On a les relations suivantes : $\boldsymbol{\ln 1 = 0 \quad et \quad \ln \mathrm{e} = 1}$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\ln e^x = x}$.
- $\forall\, x \in]0\,;\,+\infty[$, $\boldsymbol{e^{\ln x} = x}$.

ATTENTION AUX ENSEMBLES de DEFINITION !!!!!

2) Représentation

THEOREME

Les représentations de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

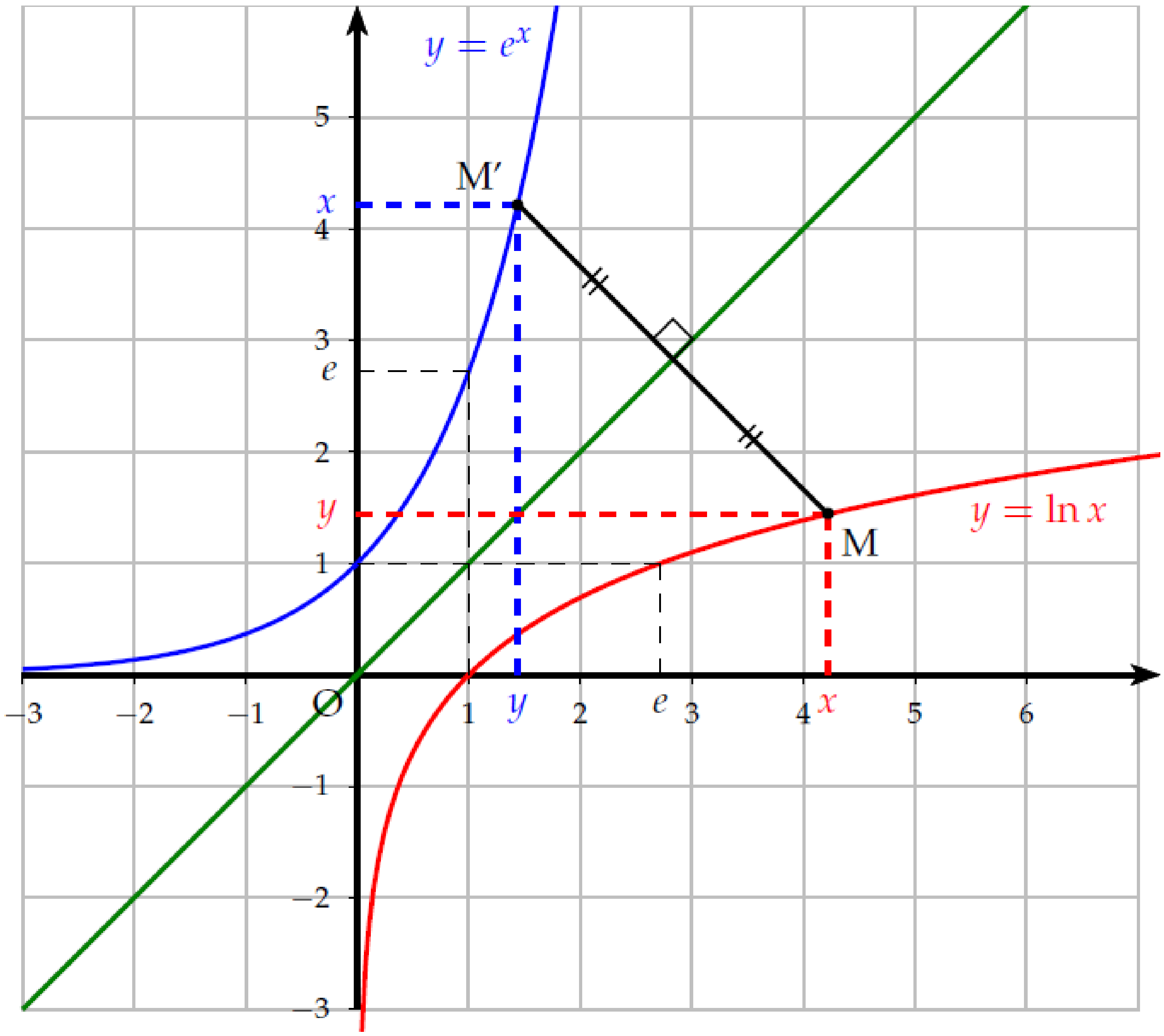
DEMONSTRATION

On note $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ les courbes respectives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

Soit $M(x\,;y)$ un point de $\mathscr{C}_{\ln}$ avec $x \in]0\,;\,+\infty[$, et $y \in \mathbb{R}$, donc $y = \ln x$.

On a alors $x = e^y$ donc le point $M'(y\,;x)$ est un point de $\mathscr{C}_{\exp}$.

Les courbes $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ sont donc symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.



3) Variation de la fonction logarithme népérien

THEOREME

> La fonction ln est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+^*$.

DEMONSTRATION

PROPRIETES

Soient a *et* b deux réels **strictement positifs,** on a :

- $\ln a = \ln b \iff a = b$
- $\ln a < \ln b \iff a < b$
- $\ln a = 0 \iff a = 1$
- $\ln a < 0 \iff 0 < a < 1$
- $\ln a > 0 \iff a > 1$

REMARQUE

- Ces différentes propriétés permettent de résoudre les équations et inéquations.
- Il est impératif de chercher les conditions d'existence des solutions.

EXEMPLES

- Résoudre $\ln(2-2x)=1$

- Résoudre $\ln(2x+1)<-1$

4) Relation fonctionnelle

PROPRIETES

Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

$$\ln(a\,b)=\ln a+\ln b$$

DEMONSTRATION

REMARQUE ET EXEMPLE

- On aurait pu définir la fonction logarithme népérien avec cette relation fonctionnelle…
- Un exemple intéressant : $\ln 2+\ln 3=\ln 6$

AUTRES PROPRIETES

Pour tous réels **strictement positifs** $a\ et\ b$, on a :

- $\boldsymbol{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b}$
- $\boldsymbol{\ln a^n = n \ln a \quad avec \quad n \in \mathbb{N}}$
- $\boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b}$
- $\boldsymbol{\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a}$

DEMONSTRATION

- $\boldsymbol{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b}$

- $\boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b}$

- $\boldsymbol{\ln a^n = n \ln a \quad avec \quad n \in \mathbb{N}}$

- $\boldsymbol{\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a}$

EXERCICES

- Exprimer $\ln 50$ en fonction de $\ln 2 \quad et \quad \ln 5$

- Exprimer $\ln \sqrt{12}$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$

- Déterminer l'entier n tel que $2^n > 10\ 000$

• Résoudre l'équation $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

5) Etude de la fonction logarithme népérien

A) DERIVEE

THEOREME

La fonction logarithme népérien est **dérivable sur** $]\mathbf{0}\,;\,+\infty[$ et :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

DEMONSTRATION

B) LIMITES

THEOREME

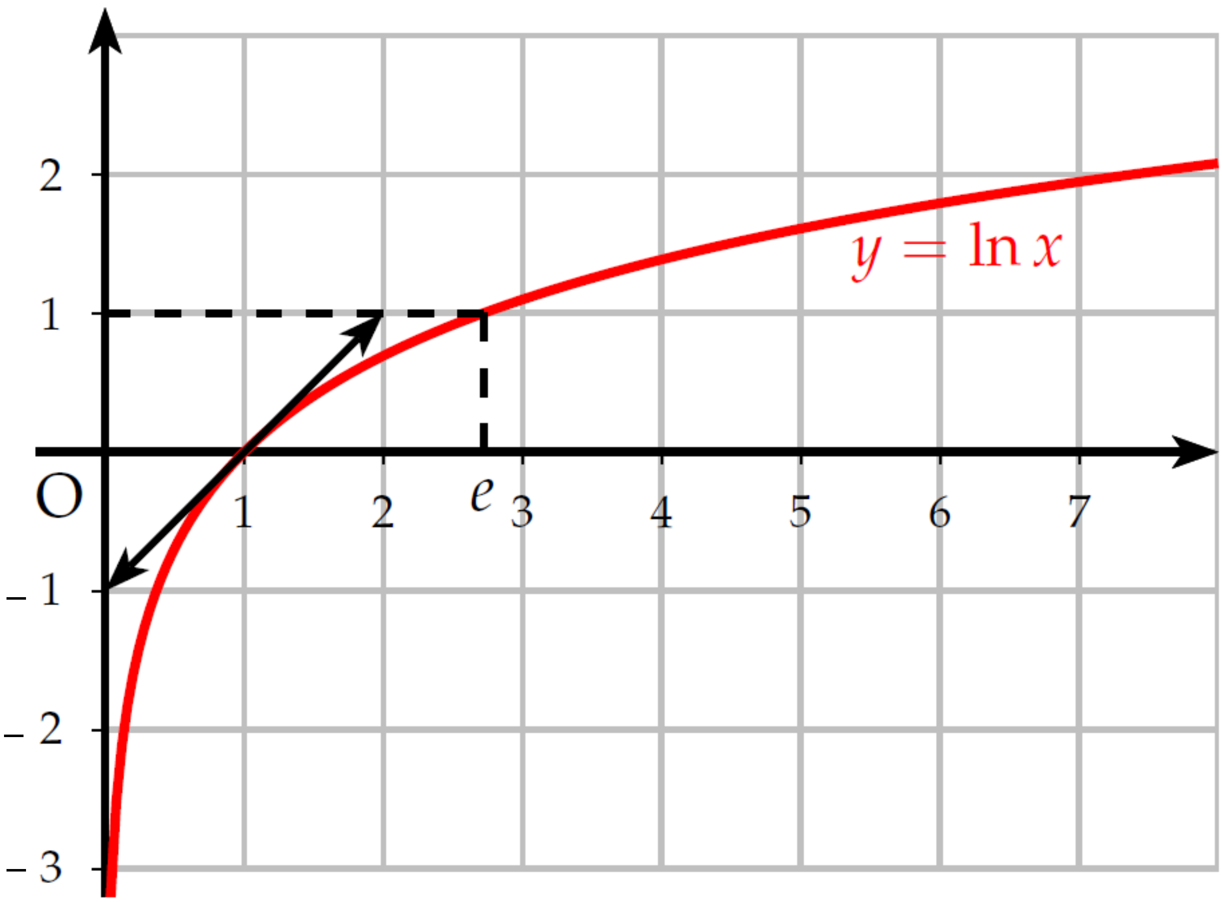
On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad et \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$$

DEMONSTRATION

C) TABLEAU DE VARIATION ET COURBE REPRESENTATIVE DE LA FONCTION ln

x	0		1		e		$+\infty$
signe de $(\ln)'$	‖			$+$			
variation de ln	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



D) Autres limites

THEOREME

• Limite de référence :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

• Croissance comparée :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad et \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$$

DEMONSTRATION

REMARQUE

A l'infini, la fonction $x \longmapsto x$ « l'emporte » sur la fonction ln.

EXEMPLE

Déterminer la limite suivante : $\lim_{x \to +\infty} (x - ln\, x)$

REMARQUE

Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur un ensemble D. La fonction $\ln u$ est alors dérivable sur D.

D'une manière générale, on a : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

DEMONSTRATION

Evident avec la dérivée de la composition de fonctions.

REMARQUE INTERESSANTE

Les fonctions $\boldsymbol{u}$ ***et*** $\boldsymbol{\ln u}$ **ont le même sens de variation** puisque $u > 0$, $(\ln u)'$ a le même signe que u'.

EXEMPLES

Déterminer la dérivée de la fonction définie sur ℝ par :

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

6) Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 4\,x - 4\ln x$

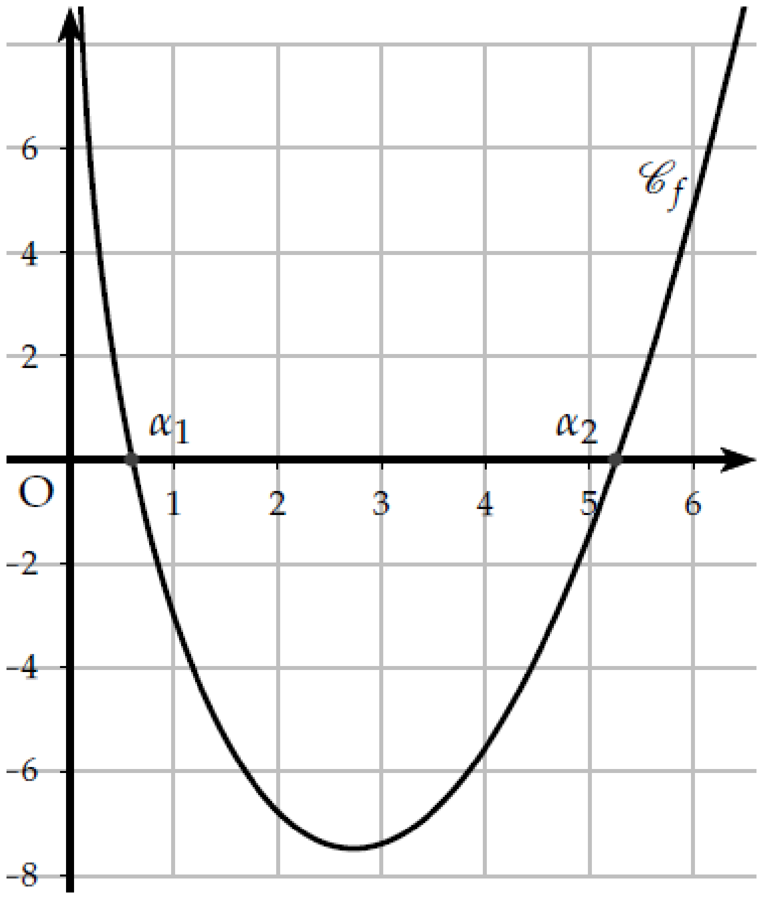
1) Etudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

2) Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Justifier.

4) A l'aide d'une calculatrice, donner la valeur approchée par défaut à 10^{-3} près des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

REPONSES



III) LE LOGARITHME DECIMAL

DEFINITION

On appelle **logarithme décimal**, la fonction notée **log**, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\boldsymbol{\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}}$$

REMARQUES

• On a $\log x = \dfrac{1}{\ln 10} \times \ln x$.

Comme $\dfrac{1}{\ln 10} > 0$, la fonction log a les mêmes variations et les mêmes limites que la fonction ln.

• La fonction log transforme les produits en somme.

• $y = \log x \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^y$ ainsi $\log 10^1 = 1$; $\log 10^2 = 2$; …… ; $\log 10^n = n$

Voici la courbe représentative de la fonction log : $(\log x)' = \dfrac{1}{x \ln 10}$