CONGRUENCES

I) DEFINITION ET PROPRIETES

DEFINITION

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$, a et b deux entiers relatifs. On dit que deux entiers relatifs a et b ***sont congrus modulo n*** si et seulement si a et b ***ont même reste par la division euclidienne*** par n. On note alors :

$$\boldsymbol{a \equiv b \ \ (modulo\ n)} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{a \equiv b \ \ (n)}$$

EXEMPLES

- $57 \equiv 15 \ \ (7)$ car $57 = 7 \times 8 + 1$ et $15 = 7 \times 2 + 1$
- ***Un nombre est congru à son reste modulo n par la division eulidienne par n.***

$$2008 \equiv 8 \ \ (10) \qquad 17 \equiv 1 \ \ (4) \qquad 75 \equiv 3 \ \ (9)$$

- $-2 \equiv 1 \ \ (3)$ car $-2 = 3 \times (-1) + 1$ et $1 = 3 \times 0 + 1$

II) PROPRIETES ET THEOREMES

PROPRIETES

La congruence est une ***relation d'équivalence***, elle est :

- ***réflexive*** : $\boldsymbol{a \equiv a \ (n)}$
- ***symétrique*** : si $\boldsymbol{a \equiv b \ (n)}$ alors $\boldsymbol{b \equiv a \ (n)}$
- ***transitive*** : si $\boldsymbol{a \equiv b \ (n)}$ et $\boldsymbol{b \equiv c \ (n)}$ alors $\boldsymbol{a \equiv c \ (n)}$

REMARQUES

→ $a \equiv b \ (n) \Leftrightarrow a \equiv b \ (-n)$ puisque n et $-n$ ont les mêmes multiples.

→ $\boldsymbol{a \equiv b \ (n) \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \,/\, a = b + k\,n}$

Par exemple en trigonométrie, on connait depuis la seconde la congruence modulo $2\,\pi$, en étendant la définition pour n non entier.

Autre exemple : $a \equiv 0 \ \ (2) \Leftrightarrow a = 2\,k, \quad k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire a pair.

→ comme nous allons le voir, dans la suite, la notion de congruence prend tout son intérêt, dès lors qu'on s'intéresse seulement au reste, pour une propriété donnée. Par exemple, lorsqu'on s'intéresse au jour de la semaine d'une date donnée, on travaillera en modulo 7.

THEOREME

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$, a et b deux entiers relatifs.

$$\boldsymbol{a \equiv b \ (n) \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \ (n)}$$

DEMONSTRATION

Comme il s'agit d'une équivalence, il faut démontrer la propriété dans les deux sens.

III) OPERATIONS SUR LES CONGRUENCES

THEOREME

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$, a, b, c *et* d des entiers relatifs vérifiant :

$$a \equiv b \ (n) \quad \text{et} \quad c \equiv d \ (n)$$

La congruence est ***compatible*** avec :

- ***l'addition*** : $\boldsymbol{a + c \equiv b + d \ (n)}$
- ***la multiplication*** : $\boldsymbol{a\,c \equiv b\,d \ (n)}$
- ***les puissances*** : $\boldsymbol{\forall\, k \in \mathbb{N},\ a^k \equiv b^k \ (n)}$

ATTENTION :

$$\boldsymbol{si \quad a \equiv b \ (n) \ et \ c \in \mathbb{Z}, alors}$$

$$\boldsymbol{a\,c \equiv b\,c \quad (n)}$$

DEMONSTRATION

IV) APPLICATIONS ET EXERCICES

APPLICATIONS

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $3^{2\,n} - 2^n$ est divisible par 7.

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2718^{9999} par 13.

3) Soit n un entier naturel. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

4) Démontrer que pour tout entier naturel n, $2\,n^2 + n + 1$ n'est pas divisible par 3.

EXERCICES

1) Déterminer les restes successifs dans la division par 7 des nombres suivants :

$$50^{100} \ ; \ 100 \ ; \ 100^3 \ ; \ 50^{100} + 100^{100}$$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{n+3} - 4^{4\,n+2}$ est divisible par 11.