SUITES ET LIMITES

I- Un raisonnement « récurrent » :

1) A partir d'un exemple :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 4^n - 1$, c'est-à-dire la séquence de nombres suivants : $\{0\,;3\,;15\,;63\,;255\,;1\,023\,;4\,095\,;\ldots\}$

On peut alors remarquer que tous ces nombres sont des multiples de 3.

Se pose alors légitimement la question : « *Pour tout entier naturel* n, $4^n - 1$ *est-il bien un multiple de 3 ?* »

> Un entier N est dit multiple de 3 s'il existe un entier k tel que $N = 3 \times k$

On peut **conjecturer** que « oui » mais il reste à le **démontrer**.

La démonstration de ce résultat repose sur un type de raisonnement appelé **« raisonnement par récurrence »**.

AXIOME DE RECURRENCE

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n.

On suppose que l'on a les assertions suivantes :

- $P(0)$ est vraie (INITIALISATION)
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie (HEREDITE)

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

> L'initialisation n'est pas forcément en $n = 0$.

Remarque :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ est vraie et si, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

2) Démontrer par récurrence :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$ la propriété « $4^n - 1$ est multiple de 3 ».

Démontrons, par récurrence, que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- INITIALISATION :

$4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Or $0 = 3 \times 0$. Donc $4^0 - 1$ est bien un multiple de 3. $P(0)$ est donc vraie.

- HEREDITE :

  Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé tel que $P(n) = 4^n - 1 = 3 \times k$ où $k \in \mathbb{N}$. *(c'est l'hypothèse de récurrence)*

  On a alors $4^{n+1} - 1 = 4^n \times 4^1 - 1$

  $4^{n+1} - 1 = 4^n \times (3+1) - 1$

  $4^{n+1} - 1 = 3 \times 4^n + \underbrace{4^n - 1}$

  $4^{n+1} - 1 = 3 \times 4^n + 3 \times k$ *(d'après l'hypothèse de récurrence)*

  $4^{n+1} - 1 = 3(4^n + k)$

  Soit $4^{n+1} - 1 = 3 \times k'$ où $k' \in \mathbb{N}$

  $P(n+1)$: $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3.

- CONCLUSION : $P(0)$ est vraie et pour tout n entier naturel, on a montré que, si P(n) est vraie, alors P(n + 1) l'est aussi. Donc, pour tout n entier naturel, $4^n - 1$ est un multiple de 3.

  ou – La propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercices :

- Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{k=n} k = 0 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Soit n un entier naturel. Comparer 2^n et n^2. Emettre une conjecture sur l'ordre de ces deux entiers, puis la démontrer.
- Démontrer l'inégalité de Bernoulli : démontrer, pour n entier, $n \geq 0$, la propriété $B(n)$ suivante : Pour tout nombre réel $x > 0$, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

II- Comportement d'une suite numérique :

Par « comportement de la suite (u_n) » on sous-entend étudier **les propriétés** du nombre u_n lorsque n devient de plus en plus grand (variations, encadrement, comportement à l'infini,…).

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur $\mathbb{N}$.

1) Suites majorées, minorées, bornées (rappels de 1ère) :

DEFINITION

Soit M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$;
- minorée par m si, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$;
- bornée si, $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Exemples :

- Soit la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

$u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{1}{3}$; …

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0.$

Cette suite est minorée par 0, mais elle est également minorée par tout réel négatif ! Un minorant n'est donc pas unique !

- Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0}$.

$u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; …

$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq 0.$

Cette suite est également minorée par 0 qui est en plus, le **minimum** de la suite car est atteint au rang 0.

Exercice :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$

1- Observer la représentation graphique de cette suite et conjecturer le plus précisément possible a et b, deux entiers tels que $a \leq u_n \leq b$.

2- Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

2) Limite finie d'une suite :

DEFINITION

La suite (u_n) admet pour limite le réel l si, tout intervalle ouvert contenant l contient **toutes** les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Si une suite (u_n) a pour limite un nombre réel l, alors cette limite est unique.

On dit aussi :

- u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$

ou

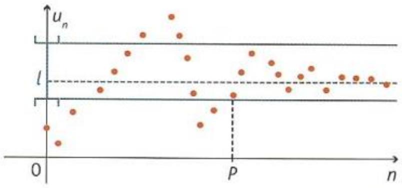
- (u_n) **converge** vers le réel l

ou

- (u_n) est **convergente**

Remarque :

Dire qu'une suite a pour limite l revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi proche de l que l'on veut à partir d'un certain rang.



3) Limite infinie d'une suite :

DEFINITION

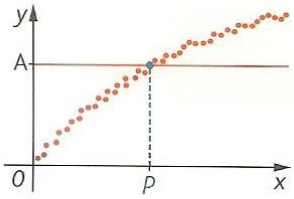
Soit $A \in \mathbb{R}$.

Si tout intervalle de la forme $]\,A\,;\ +\infty\,[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;\ A\,[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.



On dit aussi :
- u_n tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$

ou
- (u_n) **diverge** vers $+\infty$ (ou $-\infty$)

ou
- (u_n) est **divergente**

Remarque :

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple, la suite définie pout tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ qui prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'admet pas de limite et on dit également qu'elle diverge.

III- Limites et opérations sur les limites de suites :

1) Limites des suites usuelles :

$*\ \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ $\qquad *\ \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ $\qquad *\ \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$*\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\qquad *\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ $\qquad *\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\qquad *\ \lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ $\qquad *\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

2) Opérations sur les limites de suites :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) admettant une limite finie ou infinie et l et l', deux réels.

a. Limite d'une somme :

$\lim_{n\to+\infty} u_n$ / $\lim_{n\to+\infty} v_n$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Pas de résultat général
$-\infty$	$-\infty$	Pas de résultat général	$-\infty$

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

b. Limite d'un produit :

$\lim_{n\to\infty} u_n$ / $\lim_{n\to+\infty} v_n$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$l \times l'$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$+\infty$ si $l' < 0$ $-\infty$ si $l' > 0$
0	0	0	Pas de résultat général	
$+\infty$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$	Pas de résultat général	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$ si $l < 0$ $-\infty$ si $l > 0$	Pas de résultat général	$-\infty$	$+\infty$

Exemple :

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$

Par somme, on n'a pas de résultat général.

$n^2 - n = n(n-1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$

Par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c. Limite d'un quotient :

$\lim_{n\to+\infty} u_n$ / $\lim_{n\to+\infty} v_n$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$+\infty$ si $l' < 0$ $-\infty$ si $l' > 0$
0	$\pm\infty$ en fonction du signe de v_n	Pas de résultat général	$\pm\infty$ en fonction du signe de v_n	
$+\infty$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$	0	Pas de résultat général	Pas de résultat général
$-\infty$	$+\infty$ si $l < 0$ $-\infty$ si $l > 0$	0	Pas de résultat général	Pas de résultat général

Exemple :

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $w_n = \frac{1}{n^2+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$

Remarque :

Lorsque le tableau ne donne pas de résultat général, on parle de « **forme indéterminée** ».

Les formes indéterminées sont de 4 types exprimés sous forme abrégée par :

$$+\infty-\infty \quad ; \quad 0\times\infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Ces notations incorrectes **sont à proscrire** dans un devoir rédigé !

Alors que fait-on avec les formes indéterminées ?

- Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 - n - 5$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \text{ d'où } \lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ d'où } \lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty\end{array}\right\}$$ Par somme, on a une forme indéterminée.

⚠ On factorise par le terme prépondérant :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = n^2\left(3-\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{5}{n^2} = 0$

Ainsi, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right) = 3$

Donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\left(3-\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right)\right) = +\infty$

- Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{3n+5}{-2n+7}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ d'où } \lim\limits_{n\to+\infty} -2n = -\infty \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} (-2n+7) = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty \text{ d'où } \lim\limits_{n\to+\infty} (3n+5) = +\infty\end{array}\right\}$$ Par quotient, on a une forme indéterminée.

⚠ On factorise **numérateurs et dénominateur** par les termes prépondérants !

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, v_n = \frac{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n\left(-2+\frac{7}{n}\right)} = \frac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right) = 3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2+\frac{7}{n}\right) = -2$

Donc, par quotient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\frac{3}{2}$

Exercices :

Déterminer, dans chaque cas, la limite des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 5-2n \ ; \ v_n = 6n^2-n-1 \ ; \ w_n = \frac{1-n}{1+n} \ ; \ z_n = \frac{-2n^2+4n-5}{n^2+6n+9} \ ; \ t_n = \frac{n+5}{3n^2-2n+3}$$

IV- Propriétés sur les limites des suites :

1) Limites et comparaison :

THEOREME DE MAJORATION

Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant les conditions suivantes :

$*$ A partir d'un certain rang, on a $v_n \geq u_n$ $\quad * \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$

+ démonstration

THEOREME DE MINORATION

Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant les conditions suivantes :

$*$ A partir d'un certain rang, on a $v_n \geq u_n$ $\quad * \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

La démonstration est analogue à la précédente.

THEOREME

Soit $l \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite croissante.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors **tous** les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à l.

+ démonstration

Remarque :

On peut dire aussi que la suite (u_n) est majorée par le nombre l.

THEOREME (admis) dit THEOREME DES GENDARMES

Soit $l \in \mathbb{R}$ et (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant les deux conditions suivantes :

$*$ A partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$ $\quad * \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

2) Convergence monotone :

THEOREME (admis)

- Toute suite croissante et majorée admet une limite finie.
- Toute suite décroissante et minorée admet une limite finie.
- Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

+ démonstration

3) Comportement de « q^n », $q \in \mathbb{R}$:

THEOREME

Soit $q \in \mathbb{R}$. On a les résultats suivants :

$*$ si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

$*$ si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

$*$ si $q < -1$, alors la suite $(q^n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite, finie ou infinie.

+ démonstration

Remarque :

Pour $q = 1$, la suite est constante et égale à 1 (donc convergente !).

Pour $q = -1$, la suite (q^n) prend périodiquement les valeurs 1 et -1, suivant la parité de n.

Exemple :

Etudier la limite à l'infini de $3^n - 4^n$:

On a, directement, une forme indéterminée. Cependant, soit $n \in \mathbb{N}$:

$$3^n - 4^n = 4^n\left(\frac{3^n}{4^n} - 1\right) = 4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty \text{ car } 4 > 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{3}{4} < 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right) = -1$ et, par produit, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(3^n - 4^n) = -\infty$.