PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE.

I. Produit scalaire dans l'espace :

1) Repères orthonormés de l'espace :

Définition

Un repère $(O\,;\,I\,;\,J\,;\,K)$ de l'espace est **orthonormé** lorsque les droites (OI) , (OJ) et (OK) sont **deux à deux perpendiculaires** et qu'on a les égalités de distances :

$$\boldsymbol{OI = OJ = OK = 1}.$$

Remarque :

Lorsque le repère $(O\,;\,I\,;\,J\,;\,K)$ de l'espace est orthonormé, chaque axe est perpendiculaire à toute droite passant par le point O et contenue dans le plan défini par les deux autres axes.

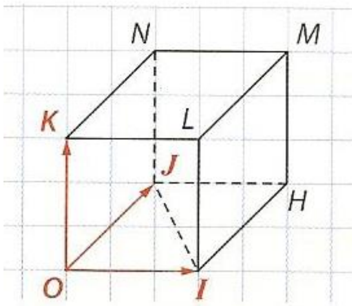
Ainsi la droite (OI) est perpendiculaire à toute droite du plan (OJK) passant par O.

Exemple :

Un cube dont l'arête mesure une unité de longueur fournit un modèle de repère orthonormé de l'espace.

On note le repère $(O\,;\,I\,;\,J\,;\,K)$ ou $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\,;\,\overrightarrow{OK}\right)$

$OM = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$



Propriété

Soit $(O\,;\,I\,;\,J\,;\,K)$ un repère orthonormé de l'espace et M un point de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans ce repère.

La longueur OM et la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ vérifient :

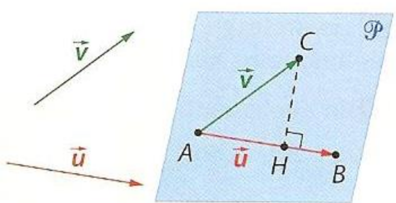
$$OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

+ démonstration.

2) Définition du produit scalaire dans l'espace :

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les points A, B et C appartiennent à un plan $\mathcal{P}$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans l'espace est par définition égal au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.



Remarques :

- Le produit scalaire **ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$**, et non du choix de leurs représentants ou du plan $\mathcal{P}$, car ce produit scalaire peut s'exprimer au moyen des normes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ seulement :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2]$$

- Pour calculer un produit scalaire, on choisit deux représentants des vecteurs situés dans un même plan. Outre la formule des normes, on dispose alors des autres méthodes vues en classe de première pour effectuer ce calcul :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Définition et propriété

Le **carré scalaire** d'un vecteur $\vec{u}$ de l'espace est le réel noté $\vec{u}^2$ vérifiant $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$.

On a, comme dans le plan : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et par suite $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

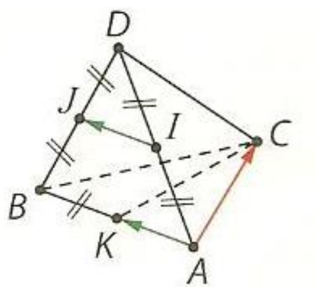
+ démonstration.

Exemple :

Soit le tétraèdre régulier ABCD de côté 1.

On a $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}$ et comme ABC est équilatéral, le point C se projette orthogonalement sur $[AB]$ en son milieu K :

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AK}^2 = \frac{1}{4}$$



Exercice :

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontrer l'égalité : $(\vec{u}+\vec{v})^2 + (\vec{u}-\vec{v})^2 = 2\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2$

2. En déduire que dans un parallélogramme la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des deux diagonales.

3. Soit ABC un triangle et A' le milieu de [BC].

Démontrer que $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2$ (théorème de la médiane).

II. Propriétés du produit scalaire :

1) Expression dans un repère orthonormé :

Propriété

Dans un repère **orthonormé** de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

+ démonstration.

Exemple :

Dans un repère orthonormé de l'espace, si : $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ alors on obtient :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -3+4-3 = -2.$$

2) Propriétés algébriques :

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan, pour tout réel k on a les relations suivantes :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

+ démonstration.

3) Vecteurs orthogonaux :

Propriété

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace

Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **est nul**, si et seulement si : $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$

+ démonstration.

Définition

Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Deux droites $\mathcal{D}$ et Δ sont orthogonales lorsque leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

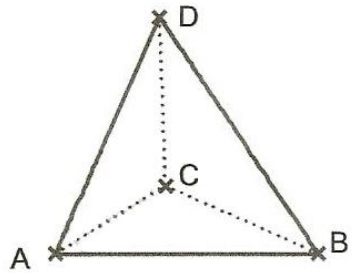
Exercices :

1. Soit un triangle ABC rectangle en A. On désigne par A' le milieu de [BC], par H le pied de la hauteur issue de A et par I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC).

- Démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
- Démontrer que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

2. On considère un tétraèdre régulier ABCD. On pose $AB = BC = CD = AC = a$.
Soit G le centre de gravité du triangle BCD.

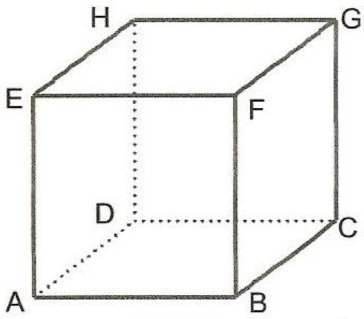
- Calculer en fonction de a les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$
- Justifier que (AD) est orthogonale à (BC)



- Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
- Déduire des calculs précédents le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$
- Calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$. Que peut-on en conclure ?

3. ABCDEFGH est un cube. L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AD}\,,\ \overrightarrow{AE}\right)$.

Soit I le point de coordonnées $(1-k\ ;\ 0\ ;\ 1)$ avec $k \in \mathbb{R}$.



- Justifier que $I \in (EF)$.
- Déterminer les valeurs de k pour lesquelles le triangle AIC est rectangle.
- Faire un dessin.

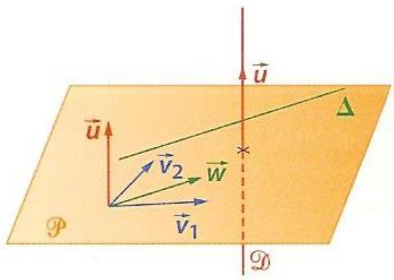
III. Orthogonalité dans l'espace :

1) Orthogonalité entre une droite et un plan :

Propriété et définition

Si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$.

On dit que la **droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$**.



+ démonstration.

Conséquences :

Pour montrer qu'une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, il suffit d'établir qu'un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$.

2) Vecteur normal à un plan – équation cartésienne :

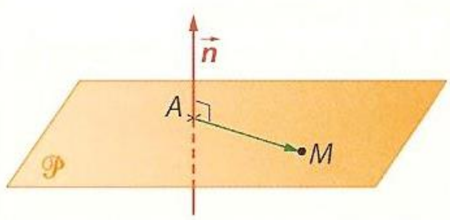
Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan, on appelle vecteur normal à $\mathcal{P}$, tout vecteur directeur $\vec{n}$ d'une droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Propriété

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et A un point de $\mathcal{P}$.

Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, et dans tout repère orthonormé de l'espace, le plan $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme : $ax + by + cz + d = 0$, où a, b et c sont les coordonnées de $\vec{n}$ dans ce repère.



Propriété

L'ensemble (E) des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,,y\,,z)$ vérifient l'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b et c sont trois réels non tous nuls est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

+ démonstration.

<u>Exemple :</u>

Dans un repère orthonormé on donne le point $A(2\,;\,-1\,;\,0)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ a pour équation :

$-1(x-2)+2(y+1)+3z=0 \quad \rightarrow \quad -x+2+2y+2+3z=0$ soit $-x+2y+3z+4=0$

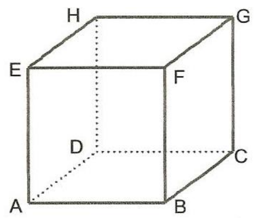
<u>Remarque :</u>

L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Par exemple le plan d'équation $x+y+2z-1=0$ a aussi pour équation $2x+2y+4z-2=0$

<u>Exercices :</u>

1. On considère un cube ABCDEFGH.



- Justifier que $\overrightarrow{AE}$ est un vecteur normal au plan $(ABCD)$.
- En déduire la valeur de $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$
- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est normal au plan $(HDBF)$.

2. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k})$.

On considère les points $A(3\,;\,1\,;\,2)$; $B(1\,;\,-1\,;\,1)$ et $C(5\,;\,2\,;\,3)$.

- Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.
- Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k})$.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ les plans d'équations respectives : $2x+y-z-3=0$ et $x+2y-2z+5=0$.

Montrer que l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$ est une droite dont on donnera un représentation paramétrique.

4. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$.

On considère la droite δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$; le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x-y-4z+12=0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation $5x+y-3z+2=0$.

- Déterminer l'intersection de δ et de $\mathcal{P}$.
- Déterminer l'intersection de δ et de $\mathcal{P}'$.

- Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}$ '.