DROITES, PLANS ET VECTEURS DE L'ESPACE.

I- Droites et plans de l'espace :

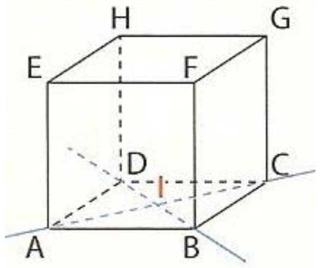
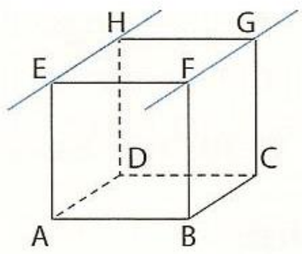
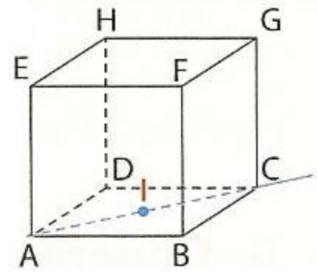
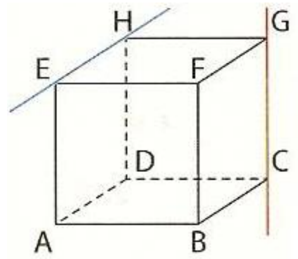
Rappels des règles de base

- Par deux points distincts de l'espace, passe une unique droite.
- Par trois points non alignés passe un unique plan.
- Si un plan contient deux points distincts A et B, il contient la droite (AB).
- Tous les résultats de géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace

1) Positions et intersection de droites et de plans :

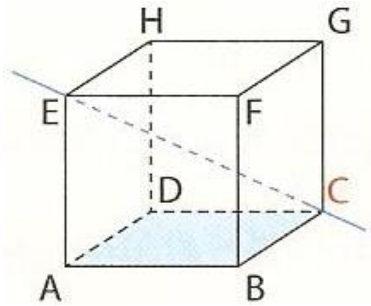
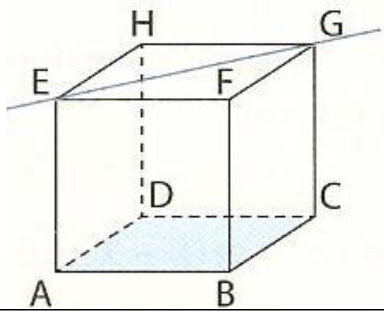
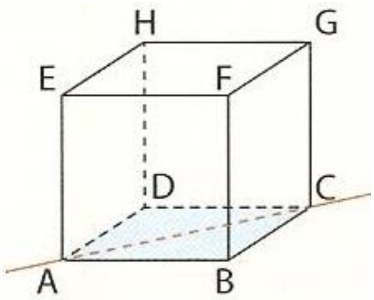
a. Positions relatives de deux droites :

Deux droites de l'espace peuvent être :

Droites coplanaires (dans un même plan)			Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites parallèles		
			
Les droites (AC) et (DB) sont sécantes en I.	Les droites (EH) et (FG) sont strictement parallèles.	Les droites (AI) et (AC) sont confondues.	Les droites (EH) et (GC) sont non coplanaires
Leur intersection est			
un point	vide	égale à (AI) (et à (AC))	vide

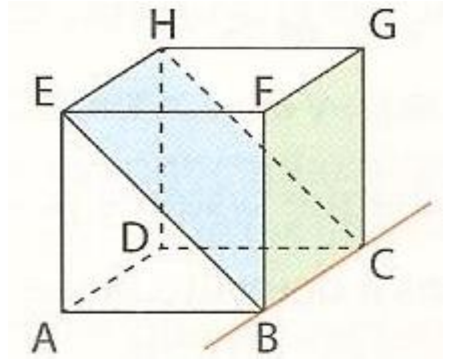
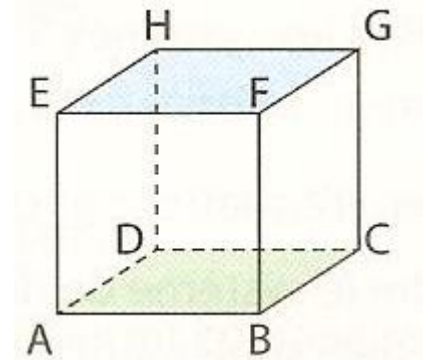
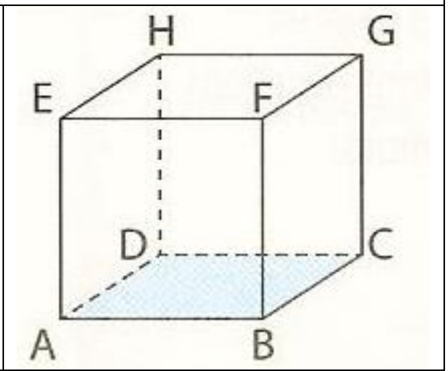
b. Positions relatives d'une droite et d'un plan :

Une droite et un plan de l'espace peuvent être :

Droite et plan sécants	Droite et plan parallèles	
		
La droite (EC) et le plan (ABC) sont sécants en C.	La droite (EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles.	La droite (AC) est contenue dans le plan (ABC)

c. Positions relatives de deux plans :

Deux plans de l'espace peuvent être :

Plans sécants	Plans parallèles	
		
Les plans (EBC) et (FBC) sont sécants suivant la droite (BC).	Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.	Les plans (ABC) et (ABD) sont confondus.

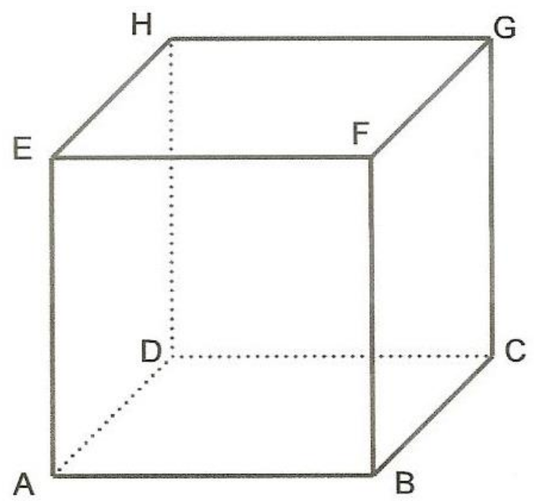
Remarques :

- Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas nécessairement parallèles.
- Il n'est pas possible que deux plans aient un seul point commun.

Exercices :

1. On considère un cube ABCDEFGH. Citer :

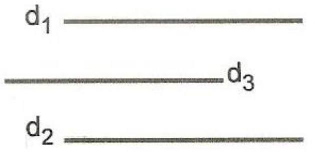
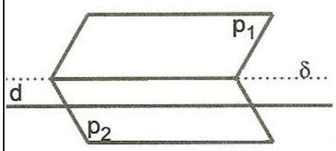
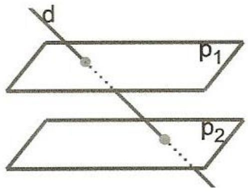
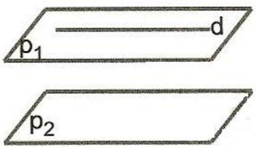
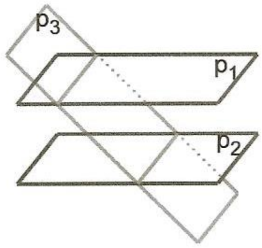
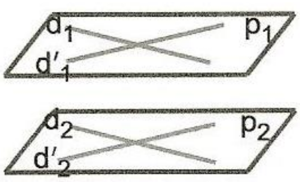
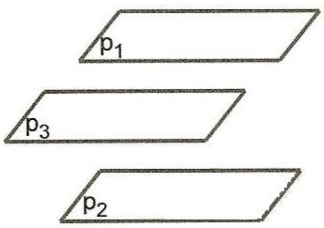
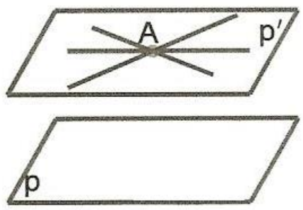
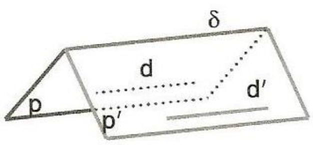
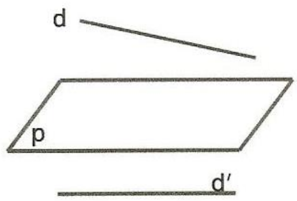
- Deux droites sécantes ;
- Deux droites strictement parallèles ;
- Deux droites non coplanaires ;
- Deux plans sécants ;
- Deux plans strictement parallèles ;
- Une droite sécante à un plan ;
- Une droite strictement parallèle à un plan ;
- Une droite contenue dans un plan.



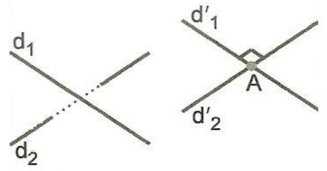
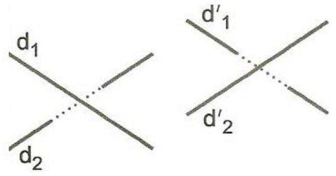
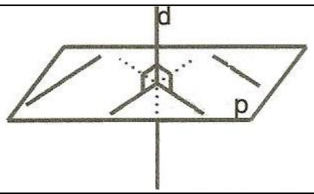
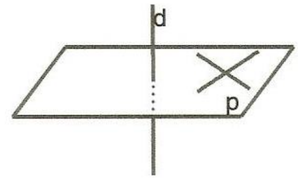
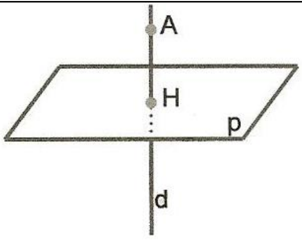
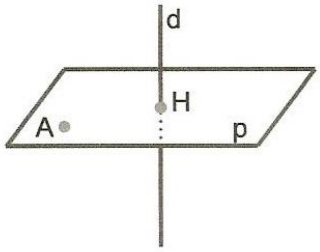
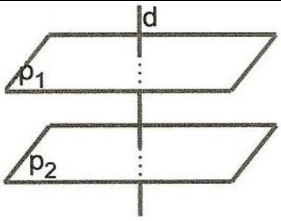
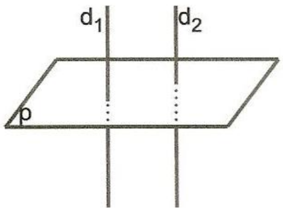
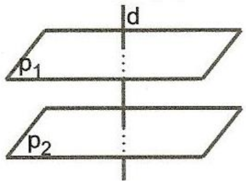
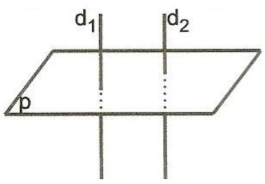
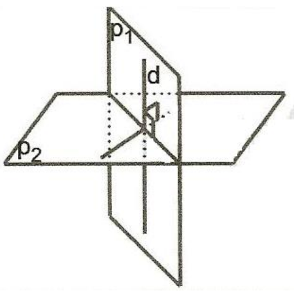
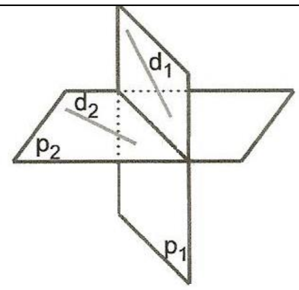
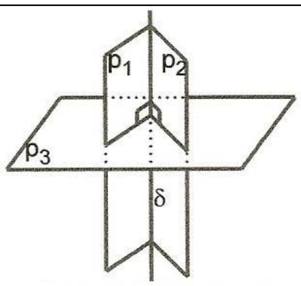
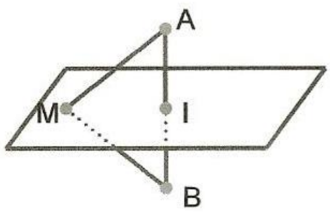
2. Dans le cube de la figure précédente, indiquer (sans justifier) les positions relatives

- Des plans (EFA) et (GCD) ;
- Des droites (EF) et (HC) ;
- De la droite (DG) et du plan (ABE) ;
- Des plans (CDG) et (ABG) ;
- Du plan (EHB) et de la droite (DF) ;
- Des droites (AG) et (BH).

2) Parallélisme de droites et de plans :

Si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles à une même droite d_3 alors d_1 et d_2 sont parallèles entre elles		Si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles, alors tout plan contenant d_2 est parallèle à d_1.	
Si deux plans $p_1$et p_2 sont sécants suivant une droite δ, toute droite d parallèle à p_1 et p_2 est parallèle à δ.		Si deux plans $p_1$et p_2 sont parallèles, toute droite d sécante à $p_1$est aussi sécante à p_2.	
Si deux plans $p_1$et p_2 sont parallèles, toute droite d contenue dans p_1 est parallèle à p_2.		Si deux plans $p_1$et p_2 sont parallèles, tout plan p_3 sécant à p_1 est aussi sécant à p_2 et les droites d'intersection sont parallèles.	
Pour que deux plans p_1 et p_2 soient parallèles, il suffit que p_1 contienne deux droites sécantes d_1 et d'_1 respectivement parallèles à deux droites sécantes d_2 et d'_2 de p_2.		Pour qu'une droite d soit parallèle à un plan p, il suffit que d soit parallèle à une droite de p.	
Si deux plans $p_1$et p_2 sont parallèles à un même plan p_3 alors p_1 et p_2 sont parallèles entre eux.		Etant donnée un plan p et un point A, il existe un et un seul plan p' passant par A et parallèle à p ; ce plan contient toutes les droites passant par A et parallèles à p.	
Théorème « du toit » Si deux droites parallèles d et d' sont dans des plans p et p' sécants suivant une droite δ, alors d et d' sont parallèles à δ.		**Attention** Si d est parallèle à p et si d' est parallèle à p, on ne peut pas en déduire que d est parallèle à d'.	

3) Orthogonalité de droites et de plans :

Deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales si leurs parallèles respectives d'_1 et d'_2 passant par un même point A sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.		Si deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, toute parallèle d'_1 à d_1 est orthogonale à toute parallèle d'_2 à d_2.	
Une droite d est perpendiculaire à un plan p si elle est orthogonale à toutes les droites de p.		Pour qu'une droite d soit perpendiculaire à un plan p il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de p.	
Par un point A il passe une et une seule droite d perpendiculaire à un plan p donné. Le point d'intersection H de d et de p est appelé projeté orthogonal de A sur p.		Par un point A il passe un et un seul plan p perpendiculaire à une doite d donnée. Le point d'intersection H de d et de p est appelé projeté orthogonal de A sur d.	
Si deux plans p_1 et p_2 sont parallèles, toute droite d perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.		Si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles, tout plan p perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.	
Si deux plans p_1 et p_2 sont perpendiculaires à une même droite d, alors p_1 et p_2 sont parallèles.		Si deux droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires à un même plan p, alors d_1 et d_2 sont parallèles.	
Deux plans p_1 et p_2 sont perpendiculaires si l'un d'eux contient une droite d perpendiculaire à l'autre.		**<u>Attention</u>** Si p_1 et p_2 sont deux plans perpendiculaires, une droite d_1 quelconque de p_1 n'est pas orthogonale à une droite d_2 quelconque de p_2.	
Si des plans sécants p_1 et p_2 sont tous deux perpendiculaires à une même plan p_3, alors la droite δ d'intersection de p_1 et p_2 est perpendiculaire à p_3.		Le plan médiateur d'un segment [AB] est le plan passant par I milieu de [AB] et perpendiculaire à la droite (AB). C'est l'ensemble des points M équidistants de A et de B.	

Remarques :

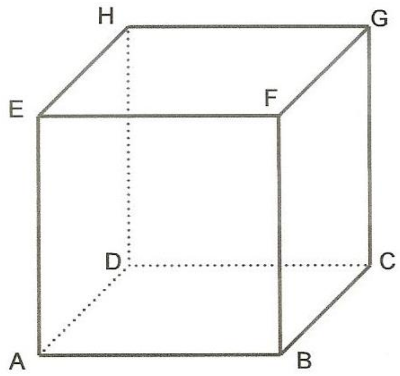
Les constructions d'intersections dans l'espace se feront en ne perdant pas de vue que :

- Deux droites qui paraissent sécantes sur un dessin ne le sont pas nécessairement.
  Pour justifier qu'elles sont effectivement sécantes, il faut justifier que ces droites sont coplanaires.
- L'intersection de deux plans sécants est une droite.
  Le dessin de deux plans n'est pas suffisant pour faire apparaitre leur droite d'intersection.
  (Il faudra souvent utiliser des intersections de droites contenues dans les plans).
- Lorsque deux plans sont parallèles, leurs droites d'intersection avec un même troisième plan sont des droites parallèles.

Exercices :

1. On considère un cube ABCDEFGH.

- Justifier que les droites (HE) et (EB) sont perpendiculaires.
- Les droites (GE) et (EB) sont-elles perpendiculaires ?
- Que peut-on dire des droites (HE) et (FA) ?
- Justifier que la droite (EG) est parallèle au plan (ABCD).
- Justifier que la droite (DB) est perpendiculaire au plan (EAG).
- Justifier que la droite (HB) est sécante au plan (EGC).
  Construire leur point d'intersection.
- Soient I et J les milieux de [AB] et [AE].
  - Justifier que (IJ) est parallèle au plan (BCH).
  - Justifier que (IJ) et (BF) sont sécantes.
    Construire leur point d'intersection.
  - Justifier que (IJ) est sécante au plan (DBF).
    Construire leur point d'intersection.



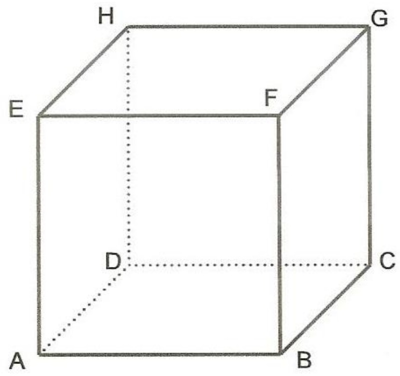
2. On considère un cube ABCDEFGH.

Soit I le milieu de [AB] et K le point défini par $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GH}$.

Un plan p coupe la face ABCD suivant [DI] et la face DCGH suivant [DK].

Montrer que l'intersection de p avec la face ABFE est parallèle à [DK]. Tracer cette intersection.

Déterminer et tracer l'intersection de p avec les autres faces du cube.



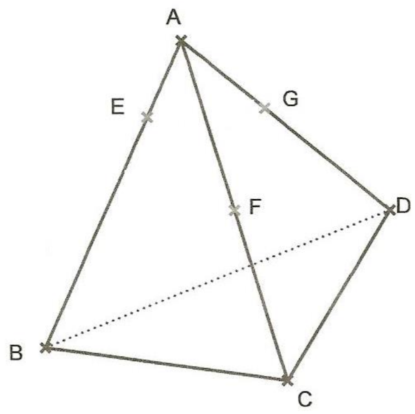
3.

On considère le tétraèdre ABCD représenté ci-contre.

Les points E, F et G appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [AC] et [AD].

Construire l'intersection du plan (EFG) avec le plan (BCD).

(On justifiera la construction).



4. On considère un cube ABCDEFGH.

Les deux questions sont indépendantes.

- Le point J est un point de l'arête [FG].

  Le point K est un point de l'arête [AB].

  Le point L est un point de l'arête [DH].

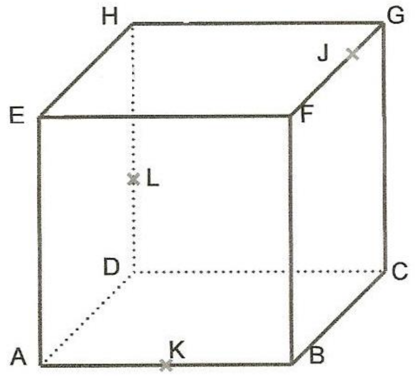
  (Voir figure).

  Construire l'intersection du plan (JKL) avec les faces du cube. (On justifiera les constructions)

- On suppose que J, K et L sont les milieux respectifs de [FG], [AB] et [DH].

  Démontrer que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (JKL).

  Démontrer que JKL est un triangle équilatéral.



II- Vecteurs de l'espace :

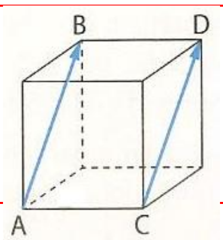
1) Notion de vecteur de l'espace :

Propriétés (admises)

Les propriétés vues pour les vecteurs dans le plan (addition, multiplication par un réel, relation de Chasles, ...) restent valables pour les vecteurs de l'espace.

Définition

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si **ABDC** est un parallélogramme (éventuellement aplati).



2) Vecteurs colinéaires :

Définition

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Remarque :

- Deux vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction.
- Si $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k > 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens ;
- Si $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k < 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire.
- Lorsque deux vecteurs non nuls sont colinéaires, on peut écrire l'un en fonction de l'autre ($\vec{v} = k\vec{u}$). On dit que les deux vecteurs sont **dépendants.** Lorsque deux vecteurs ne sont pas colinéaires, on dit qu'ils sont **indépendants ou libres.**

Exercice :

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

1. Soient I et J définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
2. Soient K et L définis par $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AL} = k\overrightarrow{AD}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

   Démontrer que $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
3. A quel théorème de géométrie classique ces résultats peuvent-ils être associés ?

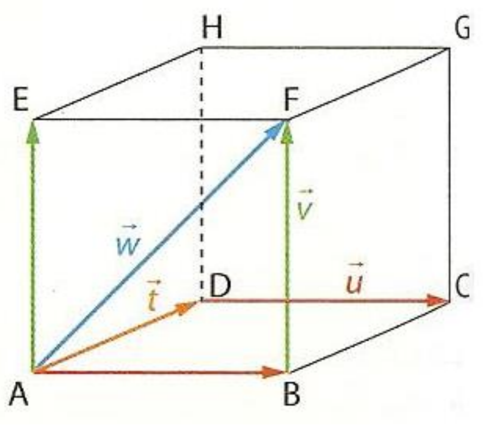
3) Vecteurs coplanaires :

Définition

Des vecteurs sont coplanaires si et seulement si en traçant leurs représentants à partir d'un même point A, leurs extrémités sont coplanaires avec A.

Exemple :

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre :



- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires car $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AF}$ et A, B, E et F sont dans le plan (ABE).
- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ ne sont pas coplanaires car $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{t} = \overrightarrow{AD}$ et l'unique plan contenant A, B et E est (ABE) qui ne contient pas D.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires puisque $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ et A, B et E sont dans le plan (ABE), cependant les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires.

Remarque :

Deux vecteurs sont toujours coplanaires, contrairement à deux droites.

4) Opérations sur les vecteurs :

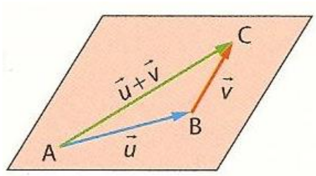
Deux vecteurs étant toujours coplanaires, on définit comme dans le plan la somme de deux vecteurs, le produit d'un vecteur par un réel, les notions de vecteurs colinéaires et de vecteur directeur d'une droite.

On admet que les propriétés de calcul dans le plan sont conservées :

Pour tous réels k et k'

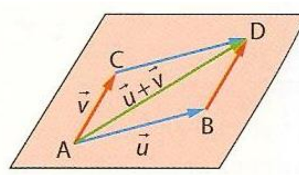
et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$



Relation de Chasles :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Règle du parallélogramme :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

ABDC parallélogramme

III- Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace :

Propriétés (admises)

- Soit A un point et soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

L'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

- Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs colinéaires.

IV- Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace :

Propriété

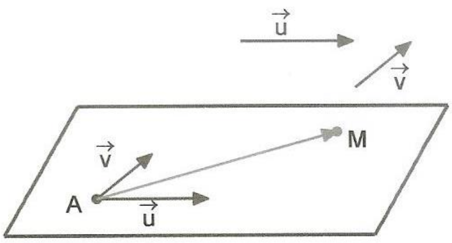
Soit A un point et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

L'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$ est un plan.

On dit que c'est le plan passant par A et de couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}\,,\vec{v})$.

C'est le plan contenant les droites $(A\,;\ \vec{u})$ et $(A\,;\ \vec{v})$.



\+ démonstration.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

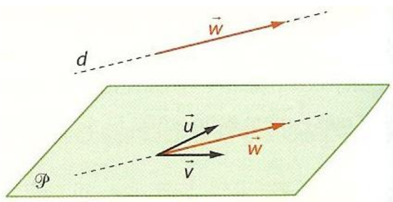
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels t et t' tels que :

$$\vec{w} = t\vec{u} + t'\vec{v}$$

+ démonstration.

Remarque :

Une droite d de vecteur directeur $\vec{w}$ est parallèle à un plan P de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



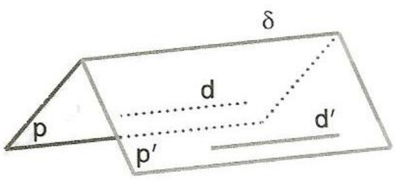
Exercices :

1. **Théorème du toit.**

   On considère deux plans p et p' sécants suivant une droite δ et deux droites d et d' parallèles telles que d est contenue dans p et d' est contenue dans p'.

a- Justifier que si d et d' sont confondues alors $\delta = d = d'$.

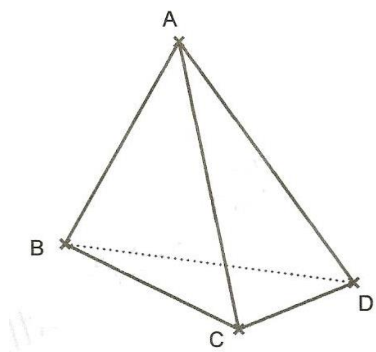
b- On suppose que d et d' ne sont pas confondues. Soient $A \in d$ et $A' \in d'$. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et $\vec{v}$ un vecteur directeur de δ.



- En supposant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, justifier que p est le plan passant par A et de couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, puis en conclure que p et p' sont parallèles.
- En déduire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- En déduire que d et d' sont parallèles à δ.

2. On considère un tétraèdre ABCD.

   Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; F le point défini par $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$.



a- Placer les points E, F et G sur le dessin.

b- Justifier que E se trouve dans le plan (ABC).

c- Les points E, C et D sont-ils alignés ? Justifier.

d- Justifier que les droites (FC) et (AD) sont coplanaires.

e- Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire que G est le point d'intersection des droites (AD) et (FC).

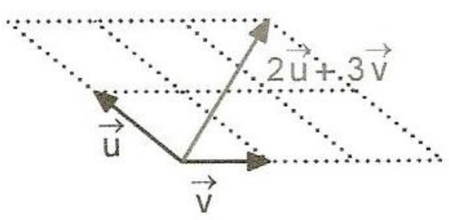
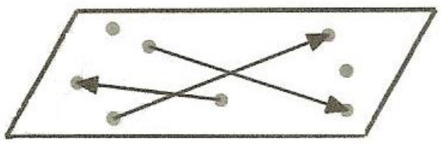
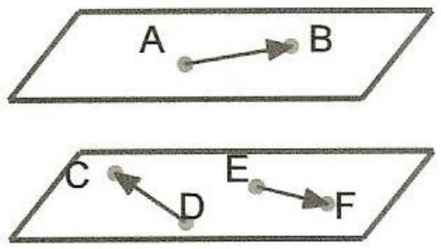
Définition

On dit que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$.

<u>Remarques :</u>

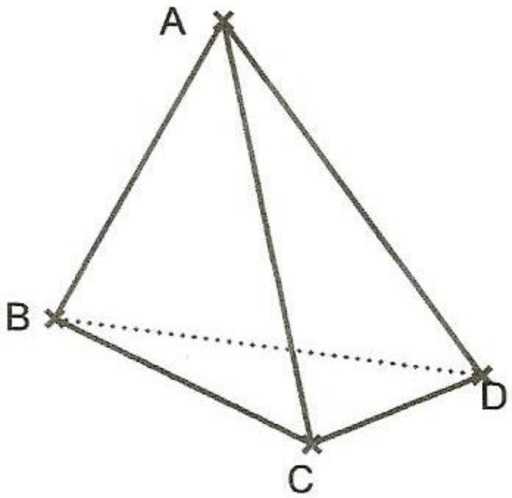
- Pour trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires, si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ avec $\alpha \neq 0$, alors on peut exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$.
  Comme au moins l'un des coefficients α, β, γ est non nul, on peut effectivement exprimer l'un des vecteurs en fonction des deux autres.
- Lorsque trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, on dit alors que les trois vecteurs sont dépendants (s'ils ne sont pas coplanaires, on dit qu'ils sont indépendants ou libres).

<u>Exemples :</u>

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ sont coplanaires.	Si des points sont dans un même plan, 3 vecteurs obtenus à partir de ces points sont nécessairement coplanaires.	Attention !!! Des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ peuvent être coplanaires sans que les points A, B, C, D, E et F soient dans un même plan.
		

<u>Exercice :</u>

On considère un tétraèdre ABCD.



1. justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

2. Soit I le milieu de [AD] ; J le milieu de [BC] ; K défini par $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CA}$ et L défini par $\overrightarrow{BL} = k\overrightarrow{AD}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- Existe-t-il une valeur de k pour laquelle $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont colinéaires ?

V- Repères de l'espace :

1) Repères de l'espace :

Définition

Si $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe, alors on munit l'espace du repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$.

Il existe un unique triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que, pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + k\vec{z}$.

x est **l'abscisse** du point M, y est **l'ordonnée** et z est **la cote.**

Définition

On dit que le repère est orthonormé si $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

2) Colinéarité et alignement dans un repère de l'espace :

Propriétés

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire tel que $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases}$
- Si $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$
- Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

\+ démonstration.

3) Milieu, distance :

Propriétés

* $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ est le milieu du segment $[AB]$.

Dans un repère orthonormé :

* la **norme** du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

*la **distance** $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Attention !!

Il faut être dans un repère orthonormé pour calculer la norme ou la distance de cette façon.

\+ démonstration.

Exercices :

1- L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$.

On considère les points $A(-3\ ;\ 5\ ;\ 2)$; $B(-2\ ;\ 1\ ;\ 1)$; $C(4\ ;\ -2\ ;\ -2)$ et $D(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

Justifier que ABCD est un parallélogramme et déterminer les coordonnées de son centre I.

2- L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$.

On considère les points $A(-1\ ;\ 3\ ;\ 1)$; $B(3\ ;\ 1\ ;\ -1)$; $C(1\ ;\ -3\ ;\ -1)$ et $D(-5\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

- Justifier que ABC est un triangle rectangle.
- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Montrer que A, B, C et D sont coplanaires. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

3- L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$.

On considère les points $A(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$; $B(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et $C(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$

Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Déterminer les coordonnées du milieu I de [BC] et du centre de gravité du triangle ABC.

VI- Représentations paramétriques :

1) Représentations paramétriques d'une droite :

Propriété

$M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à la droite Δ passant par $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si et seulement si, il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

\+ démonstration.

Définition

$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A,\ t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_A \end{cases}$ est appelé **représentation paramétrique** de la droite Δ .

Remarque :

On obtient plusieurs représentations paramétriques pour la même droite : cela dépend des coordonnées du point A et du vecteur directeur choisi.

2) Représentations paramétriques d'un plan :

Propriété

$M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan (P) passant par $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ si et seulement si, il existe un couple de réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = at + a't' + x_A \\ y = bt + b't' + y_A \\ z = ct + c't' + z_A \end{cases}$$

\+ démonstration.

Définition

$\begin{cases} x = at + a't' + x_A \\ y = bt + b't' + y_A \\ z = ct + c't' + z_A \end{cases}$, t et $t' \in \mathbb{R}$ est appelé **représentation paramétrique** du plan (P) .

Remarque :

On obtient plusieurs représentations paramétriques pour le même plan : cela dépend des coordonnées du point A et des vecteurs directeurs choisis.

Exercices :

1- L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$.

On considère les points $A(2\,;\,-1\,;\,5)$; $B(1\,;\,-3\,;\,2)$ et $C(2\,;\,3\,;\,9)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) et une représentation paramétrique de la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Déterminer si ces deux droites sont sécantes et donner éventuellement les coordonnées de leur point d'intersection.

2- L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$.

Justifier que l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, est une droite d que l'on caractérisera.