BACCALAUREAT GÉNÉRAL BLANC

SESSION 2014 – 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU Vendredi 27 Mars 2015

Durée de l'épreuve : 4 heures (*minimum 3 heures*)

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la règlementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées dont une feuille annexe à rendre avec vos copies (<u>ne pas rendre le sujet</u>).

EXERCICE 1 **_5 pts_**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3\,u_n}{1 + 2\,u_n}$$

1)

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2) On admet que pour tout entier naturel $n, u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}.$$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}.$$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2 *4 pts*

PARTIE A *Restitution organisée de connaissances*

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z.

On admet l'égalité : $|z|^2 = z\,\overline{z}$.

Montrer que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

PARTIE B *Étude d'une transformation particulière*

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et –1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}$$

1) Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.

- **a.** Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f et placer les points C et C' dans un repère donné en annexe.
- **b.** Montrer que le point C' appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
- **c.** Montrer que les points A, C et C' sont alignés.

2) Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.

3) Montrer que pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.

4) Montrer que pout tout nombre complexe $z \neq 1$,

$$\frac{z'-1}{z-1} \quad \text{est réel.}$$

5) On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D' par la transformation f.

EXERCICE 3 *3 pts*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 0,75 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1) Soit $z_1 = \sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2} \times i$ est :

a) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}$ ***b***) $\sqrt{12}\;e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ***c***) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ***d***) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

Dans les trois questions suivantes, le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$. Soit z un nombre complexe de la forme $x+iy$, où x et y sont des réels.

2) Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+i)^4$. L'écriture exponentielle de z est :

a) $\sqrt{2}\,e^{i\,\pi}$ ***b***) $4\,e^{i\,\pi}$ ***c***) $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ ***d***) $4\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

3) L'ensemble des points M du plan d'affixe $z=x+iy$ tels que : $|z-1+i|=\left|\sqrt{3}-i\right|$ a pour équation :

a) $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ ***b***) $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ ***c***) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ ***d***) $y=x+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

4) Soit A,B,C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A=-1-i \quad ; \quad z_B=2-2i \quad ; \quad z_C=\ 1+5i.$$

On pose : $Z=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

a) Z est un nombre réel.

b) Le triangle ABC est isocèle en A.

c) Le triangle ABC est rectangle en A.

d) Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

EXERCICE 4 — *4 pts*

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=e^x+\frac{1}{x}.$$

PARTIE A — *Étude d'une fonction auxiliaire*

a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2e^x-1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.

Démontrer que α appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;0{,}704]$.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B — *Étude de la fonction f*

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel :

$$m = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}.$$

e) Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.

Exercice 5

4 pts

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boites de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- *évènement A* : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- *évènement B* : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- *évènement S* : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1) Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

2)

a. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?

b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

3) On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.

Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

3) Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

FEUILLE ANNEXE POUR L'EXERCICE 2

NOM :

CLASSE : TERM S

PRÉNOM :