BACCALAUREAT GÉNÉRAL BLANC

SESSION 2014 – 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU Mercredi 17 Décembre 2014

Durée de l'épreuve : 4 heures

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la règlementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées.

EXERCICE 1 **- QCM -** ***4 pts***

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse ou une mauvaise réponse n'est pas pénalisée.

Proposition 1

Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

Proposition 2

g est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$.
Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution $\frac{e-1}{2}$.

Proposition 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$.

La dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est $f'(x) = (1+x)e^{-x}$.

Proposition 4

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\,e^{2x+1}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $4e$.

EXERCICE 2 ***4 pts***

On se propose dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que : $\begin{cases} N \equiv 5 \quad (13) \\ N \equiv 1 \quad (17) \end{cases}$

1) Vérifier que 239 est solution de ce système.

2) Soit N un entier relatif solution de ce système.

Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

3) On veut résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple solution simple pour cette équation.

b. En utilisant le théorème de Gauss, montrer que les couples solutions peuvent s'écrire sous la forme $(13\,k + 1\,; 17\,k + 1)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221\,k$.

5) Montrer que si $N \equiv 18 \pmod{221}$ alors $\begin{cases} N \equiv 5 & (13) \\ N \equiv 1 & (17) \end{cases}$

6) On a donc montré que $N \equiv 18 \pmod{221} \Leftrightarrow \begin{cases} N \equiv 5 & (13) \\ N \equiv 1 & (17) \end{cases}$

Application :

Zoé sait qu'elle a entre 900 et 1 000 jetons.

Si elle fait des tas de 13 jetons, il lui en reste 5.

Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 1.

Combien a-t-elle de jetons ?

EXERCICE 3

6 pts

Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.

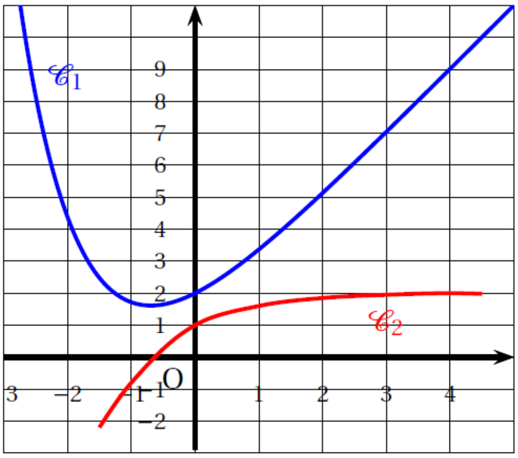
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.

Le point A de coordonnées $(0\,;2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.

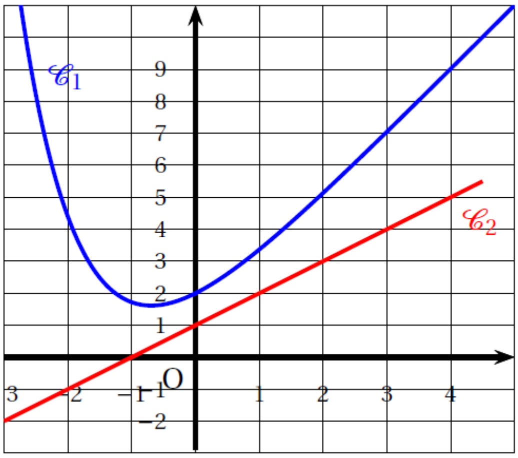
Le point B de coordonnées $(0\,;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1) Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction f' est tracée convenablement.
Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

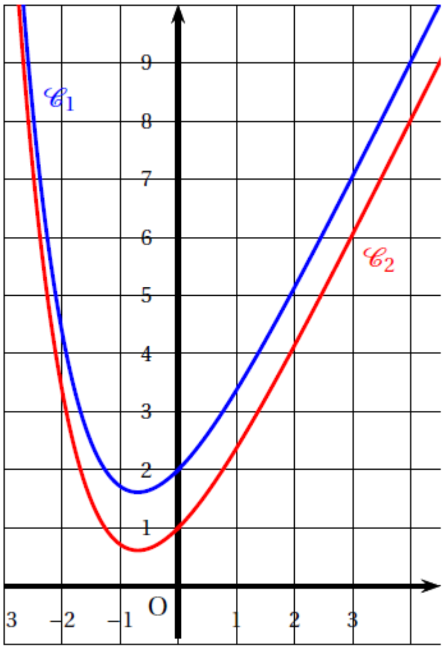
Situation 1



Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)



Situation 3



2) Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.

3) On sait que pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

a) Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements données par l'énoncé.

b) Prouver que $a = 2$.

4) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

6) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ (on pourra factoriser $f(x)$ par x).

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

1) Montrer que la fonction g admet comme 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

EXERCICE 4 ***6 pts***

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\, u_n + 3 \times 0{,}5^n \end{cases}$$

1) **a)** Recopier et à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2)

a) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, puis le sens de variation de (u_n).

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3) *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).*

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b) En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n.$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0{,}01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que …	(1)
	n prend la valeur …	(2)
	u prend la valeur…	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

Nous vous souhaitons de Joyeuses fêtes de fin d'année…

Reposez-vous bien et bonnes vacances.