

# BACCALAUREAT GÉNÉRAL BLANC

SESSION 2014 – 2015

## MATHÉMATIQUES

Série S

**ÉPREUVE DU Mercredi 17 Décembre 2014**

Durée de l'épreuve : 4 heures

**ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.**

**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.**

**Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.**

*Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées.*

**EXERCICE 1****- QCM -****4 pts**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse ou une mauvaise réponse n'est pas pénalisée.

**Proposition 1**

Toute suite positive croissante tend vers  $+\infty$ .

**Proposition 2**

$g$  est la fonction définie sur  $] -\frac{1}{2} ; +\infty[$  par  $g(x) = 2x \ln(2x + 1)$ .

Sur  $] -\frac{1}{2} ; +\infty[$ , l'équation  $g(x) = 2x$  a une unique solution  $\frac{e-1}{2}$ .

**Proposition 3**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{-x}$ .

La dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  est  $f'(x) = (1+x)e^{-x}$ .

**Proposition 4**

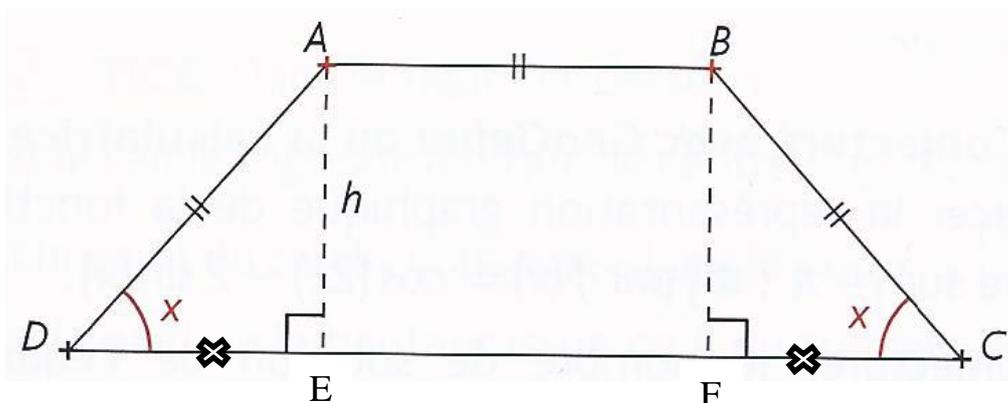
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$h(x) = 2x e^{2x+1}$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$  est  $4e$ .

**EXERCICE 2****4 pts**

On considère le trapèze isocèle ABCD ci-dessous où  $AD = AB = BC = 1$ .

**But de l'exercice** : trouver la valeur de l'angle  $x$  pour laquelle l'aire du trapèze est maximale.



- 1) Exprimer la hauteur  $h$  du trapèze en fonction de l'angle  $x$ .
- 2) Démontrer que l'aire  $\mathcal{A}$  du trapèze est définie sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $\mathcal{A}(x) = (\cos x + 1) \times \sin x$ .

3) Démontrer que la fonction dérivée  $\mathcal{A}'$  de la fonction  $\mathcal{A}$  est définie sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  par :

$$\mathcal{A}'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1.$$

- 4) Étudier le signe du trinôme  $2X^2 + X - 1$ , puis factoriser l'expression à l'aide des racines.  
 5) En déduire le signe de  $\mathcal{A}'$  en fonction de  $x$ , puis les variations de la fonction  $\mathcal{A}$ .  
 6) Conclure.

### EXERCICE 3

6 pts

#### Partie A

$f$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $f'$  est la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

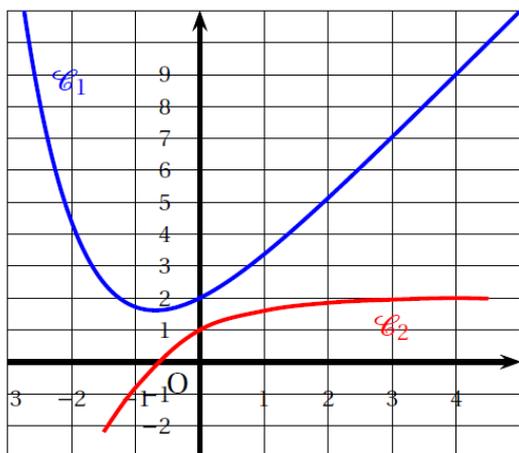
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme  $\mathcal{C}_1$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $\mathcal{C}_2$  la courbe représentative de la fonction  $f'$ .

Le point A de coordonnées  $(0 ; 2)$  appartient à la courbe  $\mathcal{C}_1$ .

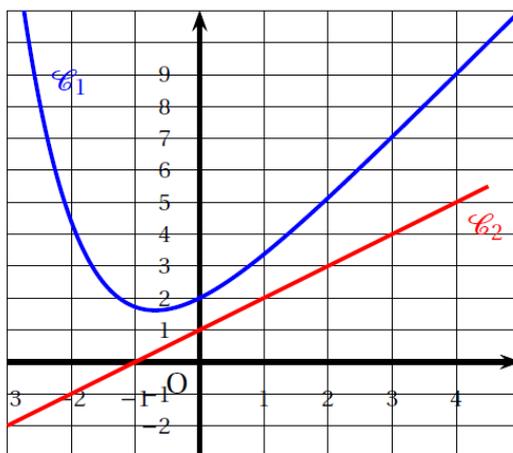
Le point B de coordonnées  $(0 ; 1)$  appartient à la courbe  $\mathcal{C}_2$ .

- 1) Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative  $\mathcal{C}_1$  de la fonction  $f$ . Sur l'une d'entre elles, la courbe  $\mathcal{C}_2$  de la fonction  $f'$  est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

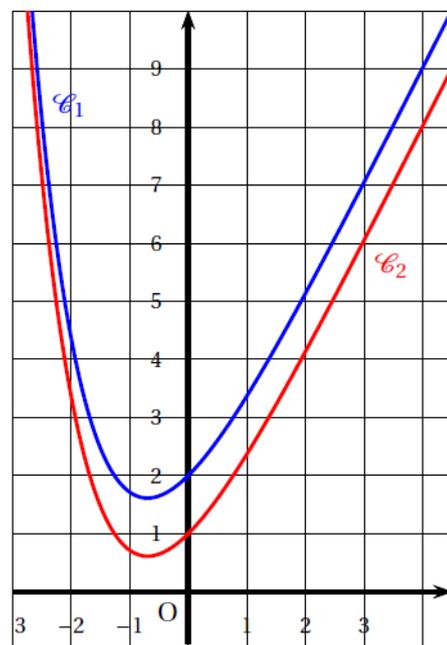
Situation 1



Situation 2 ( $\mathcal{C}_2$  est une droite)



Situation 3



- 2) Déterminer l'équation réduite de la droite  $\Delta$  tangente à la courbe  $\mathcal{C}_1$  en A.  
 3) On sait que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e^{-x} + ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.  
 a) Déterminer la valeur de  $b$  en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.  
 b) Prouver que  $a = 2$ .  
 4) Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

- 5) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
- 6) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  (on pourra factoriser  $f(x)$  par  $x$ ).

**Partie B**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x) - (x + 2)$ .

- 1) Montrer que la fonction  $g$  admet 0 comme minimum sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) En déduire la position de la courbe  $\mathcal{C}_1$  par rapport à la droite  $\Delta$ .

**EXERCICE 4**

6 pts

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n \end{cases}$$

- 1) a) Recopier et à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite  $(u_n)$  approchées à  $10^{-2}$  près :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_n$	2								

- b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

- 2)
  - a) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :
 
$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$
  - b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ , puis le sens de variation de  $(u_n)$ .
  - c) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- 3) On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$ .

- a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ . On précisera le premier terme de la suite  $(v_n)$ .

b) En déduire, que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

4) Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de  $n$  telle que  $u_n \leq 0,01$ .

<b>Entrée :</b>	$n$ et $u$ sont des nombres
<b>Initialisation :</b>	$n$ prend la valeur 0 $u$ prend la valeur 2
<b>Traitement :</b>	Tant que ... (1) $n$ prend la valeur ... (2) $u$ prend la valeur... (3) Fin Tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher $n$



Nous vous souhaitons de Joyeuses fêtes de fin d'année...

Reposez-vous bien et bonnes vacances.