# DECOUVERTE D'UNE NOUVELLE FONCTION

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une fonction $f$ **qui est proportionnelle** à sa dérivée $f'$.

Par exemple, le phénomène de désintégration des noyaux radioactifs, l'activité de désintégration à l'instant $t$ est proportionnelle au nombre de noyaux à l'instant $t$ : $N'(t) = k\,N(t)$.

Nous allons nous intéresser à l'une des fonctions de ce type. Plus particulièrement, que peut-on dire **d'une fonction qui serait égale à sa dérivée** ?

Vous connaissez déjà l'une d'entre elles… la fonction nulle !!! mais cette fonction est sans intérêt…

***Le but de ce chapitre est d'en trouver d'autres*… *et une en particulier*….**

## A VOUS DE JOUER….

• Supposons maintenant qu'il existe une fonction $f$, non nulle, définie et dérivable sur ℝ, telle que :

$$f' = f \quad sur\ \mathbb{R}$$

**1)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f$.
Démontrer que $g' = g \quad sur\ \mathbb{R}$.

**2)** Soit $h$ une fonction vérifiant aussi $h' = h \quad sur\ \mathbb{R}$.
Que peut-on dire de $f + h$ ?

**3)** Si une telle fonction $f$ existe, que peut-on conclure des deux questions précédentes ?

• Supposons maintenant qu'il existe une fonction $f$, définie et dérivable sur ℝ, vérifiant les conditions :

$$(E)\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

**a)** On considère la fonction $\varphi$ définie sur ℝ par :

$$\varphi(x) = f(x)f(-x)$$

Montrer que $\varphi$ est une fonction constante égale à 1 sur ℝ.

**b)** En déduire que $f$ ne s'annule pas sur ℝ puis que la fonction $f$ est strictement positive.

**c)** Démontrer que si $g$ est une fonction qui vérifie $(E)$ alors $g = f \quad sur\ \mathbb{R}$.

**N.B** : on pourra considérer la fonction $h$ définie sur ℝ par $\boldsymbol{h = \frac{f}{g}}$

**d)** Que peut-on en conclure ?

**CONCLUSION : L'existence d'une telle fonction est admise. Il existe donc une unique fonction dérivable sur ℝ qui vérifie** $(E)\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$. ***Cette fonction est appelée fonction exponentielle noté exp.***